物理のたねあかし4

シリーズエディター 高橋 康

重力とスカラー場

藤井保憲――――［著］

講談社サイエンティフィク

「物理のたねあかし」刊行にあたって

ずいぶん昔のことになりますが，私が学生だったころ，今にしてみると全く当り前なことがよく理解できずに，多くの貴重な時間をむだにしたことを思い出します．その一つの原因は，物理のある科目について，何を目的として何をやろうとしているのか，なかなか全体の見通しがつかみにくかったことにあるのではないかと思うのです．細かい技術的な運転法は，すでに多くの教科書や演習書に書いてあります．しかし，物理全体の見通しや基本的考え方を明らかにするような，問題を解くよりも何を問題にしなければいけないかを考えさせるような，あまり大きくない読みやすい本が，受験式の勉強に慣れすぎた学生には，是非必要ではないかと痛感していました．

さて，物理的時間は容赦なくすぎ去り，私は数年前定年に達し，あてがわれた教科書をもとにして学生の前で講義をすることももうなくなりました．かといって，物理と無縁になったわけでもなく，物理を教えるということに関して，反省，後悔や告白がいろいろと湧いてくるのです．定年後は，“ここのところオレにはわからん！”とはっきり言える立場に立ったといってもよいでしょう．私が 70 才に達しようとしていた頃，何か 70 才の記念出版をしてはどうかというアイディアが親しい友人の間で起こったのです．人のよい私は，すぐこれに同意してしまいました．

そこで，数人の第一級の先生方にお願いして，多くの学生が読んで永く心に残るような小さな本を気軽に書いていただき，それらを「物理のたねあか

し」としてシリーズ化してみてはどうかということになったわけです．対象は，理工系学部の３年生くらいのレベルの人達を想定しています．若い方々が読んでさっぱりわからないとしても，すぐには失望しないでください．卒業されてから，もう一度がんばってみられればよいでしょう．

これは私の70才を記念する出版であったはずでしたが，やはり物理的時間は容赦なくすぎ去り，私は70才をとっくの昔にすぎてしまいました．ところで，1957年夏，私は小さな研究論文をイタリーの学会誌に投稿し，北米を去ってアイルランドに向かいました．今はまた北米にもどったのですが，その間その小さな研究論文は，幸いにして世界各国の物理学者の間で支持を得ることになりました．これが，“ウォード(Ward)・高橋の関係式”として知られている仕事です．1997年は，ちょうどこの小論文の40周年にあたります．「物理のたねあかし」シリーズの刊行開始は，たまたま小論文の40周年の記念ということになりました．世の中，何とか理由のつくものです．

このシリーズでは，編成の段階で，東海大学教授の豊田正氏に，大変お世話になりました．氏の好意的な御盡力によってシリーズ刊行が実現し，感謝にたえません．

1997年新春

高橋　康

エドモントンにて

まえがき

本書は，“スカラー・テンソル理論”とよばれる重力理論の解説である．30 数年も前に提出された“異端”の理論が，なぜ今も活発な議論の対象となっているかについては，本文の中で詳しく説明するつもりである．一方，この理論には，概念的に“微妙な”点がいくつもあり，そのために専門的な論文の中にも，時として混乱さえ見受けられる．実は私自身にもその経験がある．そのため，本文でもあちこちで，根掘り葉掘りという印象を与えるようになってしまったかもしれない．そういうテクニカルな危うさを救うのは，けっきょく理論の背景となっている物理的考察である．私にとっては，そのせめぎ合いといったところがまた魅力でもあり，そんなことで何年も“はまって”しまった気がする．その意味で“物理のたねあかしシリーズ”に加えさせていただく資格もあろうかと考えている．最終的とはとてもいえない理論であり，またやや難解なところもあろうが，Einstein を越えようとする有力な行き方として，興味をもっていただければと願っている．

1997 年 3 月

藤井　保憲

目　　次

1章　なぜスカラー場か

Einstein の重力理論は時空の幾何学の理論である．すなわち，我々が重力として観測するのは時空の曲がり方であると考える．この考え方を定式化する基礎となるのは，時空の計量テンソル (metric tensor) $g_{\mu\nu}(x)$ である．

時空が平坦ならば計量はミンコフスキー (Minkowski) 計量，すなわち定数の対角型となり，

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$$

と表される．ここで座標の第 0 成分は時間座標 $x^0 = ct$ に選んである．

時空が平坦でない場合，これからの $g_{\mu\nu}$ のずれについて，アインシュタイン方程式を線形化すると，質量がゼロでスピンが 2 の場が出現する．こうして，重力が十分弱い場合，物質の間に働く力は，このテンソル場を媒介にして生ずるものとして理解される．この意味で Einstein の一般相対論は「テンソル理論」とよばれる．

この理論は，Einstein の一般相対性原理と等価原理を満足する理論の中で，最も単純な理論である．これら 2 つの要請を満たす理論はほかにも可能であり，いろいろなものが提案されてきた．そのような代替理論 (alternative theories) の中には Einstein 自身による試みも含まれている．それらはいろいろな動機をもっているが，実験的にそうでなければならないといった形で検証されたものは 1 つもない．それは，近年になって著しく精密になった実験的研究に

おいて，最も単純な，オリジナルな形の一般相対論が正しいとする証拠ばかりが累積しつつあるのと対照的ですらある．このことはまた，Einstein が好んだ美的価値，すなわち真実は単純で美しいものだ，という考えをこのうえなく支持しているようにもみえる．それならば，代替理論は，よって立つ動機をほとんど失いつつあるのだろうか．

その答を端的にいえばノーである．理由は，素粒子の理論と重力理論の統一が新たな課題となっている現在，重力理論は Einstein の考えた最も単純なものであるとはむしろ考えにくく，なんらかの拡張は必然である，ということになるだろう．しかし，アインシュタイン理論の実験的検証という場合には，ほとんどが古典的，かつ巨視的なものであり，その限りでは統一理論の特徴がただちに現れるとはいえないかもしれない．そういう意味では，代替理論を論ずる必然性は必ずしも高くはないが，もう少し将来の発展を視野に入れるならば，代替理論に至るのは当然の成り行きであろう．

これについては，さらに説明が必要である．昔から代替理論はさまざまな立場から多数，提出されており，それらの多くは単に数学的に拡張が可能なことを示したい，という動機のものが多かったといってよい．いずれにしても，実験的な検証可能性からはほど遠いものであったが，一方，もっと広い立場に立っての動機に基づく試みもあった．特に**統一理論**という考え方は，Einstein 自身，最も力を注いだものであった．それらの中で，H. Weyl による**ゲージ理論**の萌芽は，半世紀を経て，現代の素粒子論にとって最も基本的な法則を導くこととなったのである．

もう1つの有力な流れとして，多次元時空の理論をあげるべきだろう．これは，Th. Kaluza の 5 次元理論に端を発するが，のちに O. Klein によって整備され，今ではカルーザ・クライン理論とよばれている．この理論もまた Einstein 存命中は，現実とはほど遠い理論的理論とみなされてきたが，やはり統一を目ざす素粒子論の発展の中で再発見されてきた．しかしそのような時期にいくらか先だつ 1955 年，P. Jordan は，カルーザ・クライン理論でコンパクト化される「内部空間」の半径は，4 次元時空では 1 つのスカラー場

として出現すること，またそれが現実の物理的効果をもちうることを指摘した．もちろん Einstein のテンソル場は存在し，全体としては 2 種類の場を含む理論となる．さらに，このスカラー場は，他の物質粒子や場には，重力と同じくらいの強さで結合するので，**重力のスカラー・テンソル理論** (scalar-tensor theory of gravitation) とよばれるようになった．

カルーザ・クライン理論は，5 次元 (あるいはもっと高い次元の) 時空では完全に幾何学的な理論であるが，コンパクト化された後の，我々が住む 4 次元世界に出現するスカラー場は，特に時空に関する幾何学的な意味をもっていない．したがって，重力現象は純粋に幾何学的な面と，そうでない面とをあわせもつという考え方となる．これはもちろんアインシュタイン理論という最も単純な理論よりは複雑で，したがって見方によっては美しさ，必然さにおいて欠点があるかのようにいわれたこともあったが，統一理論がもたらす内容の豊かさの表れとみなすならば，必ずしも不満足なこととはいえないだろう．今ではこのような考えのほうが，むしろ支配的である．

この理論において，スカラー場の**非最小結合** (nonminimal coupling) という考えがはじめて提出された．以後，スカラー・テンソル理論といえば，この非最小結合をもつ理論であることが常に含意されるようになった．単にスカラー場が付随するよりも制限の強い理論を意味すると考えてよい．

しかし R. H. Dicke* は，Jordan の理論には欠陥があると主張した．すなわち，内部空間の半径は，4 次元における理論の至るところに出現する．それは，問題のスカラー場が物質と結合することを意味する．もちろんその強さは重力の程度にすぎないが，1 つの効果として，等価原理を破ることが示される．ところが等価原理の実験的証明は，非常な高精度でなされており，Jordan の理論はそれに抵触する．そこで Dicke は，多次元時空の理論とは離れて，独自のスカラー・テンソル理論を提唱した．それは非最小結合はするが，物質とは結合しないという規則をおいた理論であった．これは 1961 年に C. Brans

*この名前は “Dicky” のように発音される．そこで，ディッケではなく，ディッキーと書くことにする．

との共著論文として発表されているので，ブランズ・ディキー理論とよばれている (以後，簡単にして B–D 理論とよぶことにする).

なぜそのような理論を考えたかということだが，Dicke には独自の動機があった．それは**マッハ** (Mach) **の原理**とよばれるもので，それについても簡単に説明しておこう．話はニュートン力学における慣性力の本質，あるいはさらに突き詰めると慣性系とはどこにあるか，という問題に発する．

Bishop Berkley は Newton 理論のこの部分の曖昧さをついて論争を挑んだ．のちに E. Mach は，やはり Newton の絶対座標系につながる考えを批判し，慣性系は全恒星系に固定した座標系であること，また慣性力は座標変換によって生ずる「仮想的な」力ではなく，宇宙の全物質が及ぼす「真の」力であることを主張した．これは，我々の身のまわりの現象も，すべて全宇宙の存在によって規定されている，という主張にまで拡張解釈され，マッハの原理という名を与えられている．

この考えは Einstein にも強い影響を与えたといわれているが，最終的に彼が作り上げた一般相対論に内在する考え方とは相容れない．すなわち，一般相対論はあくまで時空の**局所的** (local) な理論であるのに対して，Mach の考えは本質的に**大域的** (global) である．全恒星系に対して固定した系という考えは，膨張宇宙には全くなじまず，Einstein はそれにかえて**局所慣性系**という概念を提供した．それにもかかわらず，Mach の考えが全く無視できるとも思えない．

たとえば，慣性力の起源の問題にしても，宇宙全体が，ちょうど我々がみる慣性力を与えるに十分な質量をもっているとすれば，

$$\frac{GM}{Rc^2} \sim 1 \tag{1.1}$$

という関係が満たされていなければならないことが示される．ここで M は宇宙の全質量である．そういうことが厳密にいえるのは，宇宙が閉じている場合に限るが，その閉じた宇宙の半径を R と書いた．ただ，宇宙が閉じていなくても，「見える」範囲の宇宙の大きさ，それに含まれる質量としてもよいだろう．そうすると，上の関係は実際にある精度で満足されているのであ

る．そのことをみるために，$c=1$ とおいて式を簡単にしよう．また宇宙は一様な質量分布をもち，その密度を ρ と書く．そうすると (1.1) 式は，

$$\frac{4\pi G}{3}\rho t^2 \sim 1 \tag{1.2}$$

となる．ここで $R=t$ とおいたが，これは現在の宇宙の年齢と解釈してよいだろう．

また，宇宙のスケール因子 $a(t)$ は $a \sim t^{2/3}$ に従って膨張しているとしよう．そうするとハッブル (Hubble) 定数 $H(t)$ は，

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3}t^{-1} \tag{1.3}$$

となる．これらを使って t を H で表すと，(1.1) 式はけっきょく，

$$\rho = \frac{27}{16\pi G}H^2 \tag{1.4}$$

となる．右辺は，宇宙の**臨界密度**の 4.5 倍で，ほぼそれと同程度と考えてよい．現実の宇宙の密度は，**暗黒物質** (dark matter) を含めると，ほぼ臨界密度に近いとされているので，これは，宇宙にはマッハの原理から要求されるくらいの質量が実際に存在することを示しているようにもみえる．

この関係が偶然であるかどうか，はっきりとはいえないが，この関係を「逆に」みると，重力定数 G は宇宙の物質のあり方によって決まっている，という解釈も可能かもしれない．ところで一方において，宇宙は時間とともに変化しているのだから，したがって G も真の定数ではありえず，やはり宇宙の時間 t の関数と考えるべきだろう．これが Dicke が到達した考えである．

これは実は全く倒錯的な考えかもしれない．つまり，G は真の定数で，(1.1) 式が満たされるように $\rho(t)$ が決まるのだ，というのが正統的な考えであるともいえる．実際，一様等方で，空間的には平坦な宇宙の場合，アインシュタイン方程式の 00 成分はまさに，

$$3H^2 = 8\pi G\rho \tag{1.5}$$

となっているのである．

このような議論があったにせよ，Dicke は，G が宇宙時とともに変化する理論を作ろうとした．それはまた，P. A. M. Dirac の**巨大数仮説** (large-numbers

hypothesis) に基づく $G(t) \sim t^{-1}$ という考えと共通するところがある．ただし全く同じではない．そもそも Dirac の議論は，1つの理論的願望を表明したもので，それを具体的な理論にしたものではない．Dicke の理論は，その願望に近い結果を与える理論ではあるが，詳しい点では違いがある．また Dirac の議論そのものも，誰でもが完全に納得するという性質のものでもない．それにもかかわらず，単純で魅力ある考えであり，また測定に携わる実験家に夢を与えたことは無視できないことである．

B–D 理論がなぜ G の時間的変化を与えるか，その理由は簡単で，前に述べた非最小結合の最も明白な効果である．その具体的なことについては2章でまず明らかにされる．しかし，この問題については，時間を決める時計として何を使うかについて，慎重な考慮が必要であることも明らかにしたい．

こうした問題点があるにせよ，この理論は「定数」が宇宙の発展とともに変化するという考えに具体性を与えた，最初の理論的模型となった．さらに，この理論は，スカラー場の効果についてきわめて具体的な予言を行った．Dicke は本来，実験家として名をなしていた人であり，実行可能な実験によって試すことのできる代替理論を提出したという点で，重力物理学にとって画期的なインパクトを与えたのであった．この点についても詳しく議論したい．

2章ではこの B–D 理論の基礎的な内容を紹介する．テクニカルにかなり面倒な点もあるので，いくつかの付録を設けた．必要に応じて参考になるだろう．あまり他にないと思われるのが 2.5 節と 2.6 節である．特に 2.6 節では，非最小結合がスカラー場とテンソル場の混合 (mixing) の意味をもっていることに注意を促した．

この理論のただ1つのパラメータ ω は，その逆数が，おおざっぱにいってスカラー場と物質の結合の強さを表している．その大きさを実験的に決める方法についてもざっと説明するが，そのような結合，したがってスカラー場の存在について積極的な証拠はなく，ω^{-1} の上限が得られているだけである．最も自然に考えれば ω^{-1} は基本的に1のオーダーだろうが，現在の上限値は 10^{-3} の程度となっている．それでも，スカラー場など存在しないのだ，と決

めつける意見はむしろ少数ではないだろうか．いろいろな方法で，探索は依然，進んでいる．つまるところ，スピンゼロという，理論的に最も単純な場が存在しないほうが不自然ではないか，という「思い」が根強いということであろう．

ついで3章では，**共形変換** (conformal transformation) を議論する．これはスカラー場の物理的な解釈にとって重要な意味をもつ概念であるにもかかわらず，一般に理解が不十分のようにも思われるので，あえて1つの章をあてたしだいである．特に**共形系** (conformal frame) をどう選ぶかという問題が重要である．一般論はここで行うが，具体的な実例には5章ではじめて出会う．無限に存在する共形系の中で特に頻繁に登場するのがJ系とE系で，2, 3章は，同じ理論をそれぞれJ系とE系で展開したものとなっている．

先に述べたように，非最小結合をもつ理論をスカラー・テンソル理論と名づけることにしたが，そのような理論はB–D理論以外にも可能である．4章では，もう1つの特徴をもつ理論として**ディラトン理論**をとりあげる．これはかつて筆者が論じたもので，重力定数と素粒子の質量に共通の起源を与えようという発想に基づいている．

この場合もまた実験的に検証可能な結論が導かれ，のちに**第5の力** (fifth force) として多くの研究が行われた．あとになってみると，最初に提出されたのは，一般的な模型の中でも特に簡単なものであり，それによる予言は，実験的にすでに排除されている．しかし実際には素粒子論の側でまだ理論的な不定性が多く残されており，そのためにパラメータが制限されているとはいえ，アイディアの基本的な部分は，いまだに生き残っているといえよう．その意味ではB–D理論と似たような状況にあるが，やはり統一理論の発展の中で，重要な1つの視点を提供した点は評価されてよいと思う．依然として，今後の実験的研究に期待したい．

5章では宇宙論的な面をとりあげる．スカラー場がこの分野で特に意味をもちうるのは，**宇宙定数問題** (cosmological constant problem) に関してだろう．暗黒物質とともに，最近の宇宙論の一番ホットな話題となりつつある．この

問題について，どんな寄与ができるか，まだ未完成の部分であるが，そのごく一端を紹介したい．3章で議論した共形系の「選び方」の具体的な例もここで示される．今後の課題についても触れておく．

この分野における研究の範囲はきわめて広く，この本でそのすべてを網羅する企てはとらなかった．また，それぞれの主題の説明にも濃淡の差が大きいかもしれないが，基本的と思われる部分の密度を高くしたつもりである．さらに広い範囲の研究の役に立てていただければ幸いである．

2章　B–D理論

スカラー・テンソル理論にスカラー場が登場する仕方は，あまり単純なものではない．最も重要な特徴は，非最小結合とよばれるもので，数式処理上からいうと，なかなか手が込んでいる．しかし，これこそJordanによって最初に考えられて以来，一貫して基本的な役割を果たしてきているので，まずこれについてやや詳細な説明をする．

スカラー・テンソル理論といわれるものの中にもいろいろな種類があるが，「原型」(prototype)とみなされるのがB–D理論であろう．この理論は，単純化のためのいくつかの仮定に基づいており，のちの時代の統一理論からみると簡単すぎるし，その他の理由でも，完全に現実的な模型とは思われないが，原型はやはり原型で，十分にかみこなしておくべき点がいくつもある．そういう観点から，B–D理論を，できるだけそのままの形で紹介し，またその意味を探るのがこの章の目的である．

2.1　ラグランジアン

まず，Brans–Dickeが最初に提案したとおりの理論を論じよう．出発点は次のラグランジアンである．

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left(\varphi R - \omega\frac{1}{\varphi}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + L_{\mathrm{m}}\right) \tag{2.1}$$

ただし，原論文では全体の乗係数として $16\pi G$ がかかっていたが，それは取り除いて，「普通」の表現に近いものにした．また，原論文では ϕ となっているのを φ とした．ω は無次元の定数で，この理論を特徴づける唯一のパラメータである．L_{m} は「物質」のラグランジアンで，特にそれは φ を含まないと仮定する．また，スカラー場の質量を表す項はない．これも重要な仮定である．

この第1項で，スカラー曲率 R にスカラー場 φ がかかっている．これが**非最小結合**である．アインシュタインの**標準理論**では，ここは，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{EH}} = \sqrt{-g}\frac{1}{16\pi G_0}R \tag{2.2}$$

となっていて，いわゆる**アインシュタイン・ヒルベルト (Einstein–Hilbert) 項**とよばれている．すなわち，R には定数がかかっている．G_0 は Newton の重力定数であるが，特に添字 0 がつけてある理由についてはあとで述べる．(2.1) 式と (2.2) 式を比較すると，この理論では G_0 が定数ではなく，

$$\frac{1}{16\pi G_{\mathrm{eff}}} = \varphi \tag{2.3}$$

によって定義される**実効重力定数** G_{eff} というものがあり，それは「力学変数」である φ によって与えられる，ということがわかる．

あとで述べる宇宙論的な状況では，第1近似として φ は**宇宙時** (cosmic time) の関数となるので，したがって実効重力定数を時間の関数とみなすことが可能となるのである．ただ，時間とともに変わるとしても，その変化の割合は，我々の身のまわりでは実に微々たるもので，大体のところ，年間 10^{-10}，あるいはさらに少ないはずである．したがって，普通の意味の物理現象に関するかぎり，重力定数は事実上，真の定数とみなしてさしつかえない．宇宙の年齢に匹敵する時間スケールでみてはじめて意味をもちうるにすぎない．

また，非最小結合とよばれる理由についても触れておこう．**アインシュタインの等価原理** (Einstein equivalence principle ; EEP) によると，スカラー場 φ

の理論は，まず平坦なミンコフスキー時空で書いておき，それに対して，

$$\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} \quad \text{および} \quad \partial_\mu \to \nabla_\mu \tag{2.4}$$

というおき換えの規則によって得られる，というのが最も標準的なやり方である*．たとえば (2.1) 式の第 2 項は，

$$-\omega \frac{1}{\varphi}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi$$

から得られたものである．スカラー場に対しては共変微分はただの微分であることを思い出そう．したがって (2.1) 式の第 2 項では，φ は $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}$ がかかっていることによってのみ重力場と結合することになる．このように，この最小限のルールによって得られる重力場との結合を**最小結合**とよんでいる．(2.1) の第 1 項は，この最小結合では得られない項である．そのために非最小結合の名が用いられる．

ここで，単位系について述べておきたい．素粒子の関係する分野では，相対論と量子論が常に使われるので，それらを特徴づける c と $\hbar$ を 1 とするように単位系を選ぶのが便利である．これによって 3 つの基本的な次元は，残り 1 つの次元によって表されることになる．たとえば長さでもよいし，質量，あるいはエネルギーでもよい．この場合，G_0 は質量の -2 乗，あるいは長さの 2 乗の次元をもつことになる．そこで，

$$8\pi G_0 = c\hbar M_{\rm P}^{-2} \tag{2.5}$$

と書き，この $M_{\rm P}$ をプランク質量 (Planck mass) とよぶ．その値を求めると，

$$M_{\rm P} = 0.243 \times 10^{19} \quad \text{GeV} \tag{2.6}$$

となる．以下ではこの $M_{\rm P}$ を $=1$ と選ぶことにする．これで，すべての量は，一見無次元のように書き表すことができる．これを**プランク単位系**とよぶことにする (実際には $G_0 = 1$ と選ぶこともあり，またそれがプランク単位系とよばれることが多いが，ここでは $\sqrt{8\pi}$ だけ違ったものを採用する)．この単位系での長さ，時間，エネルギーの 1 単位を普通の単位で表すと次のよう

---

*ただの微分 $\partial_\mu\phi$ を $\phi_{,\mu}$，それに対して共変微分 $\nabla_\mu\phi$ を $\phi_{;\mu}$ と表すことがある．その意味で上の規則を comma-to-semicolon rule とよぶことがある．

になる．

$$8.07 \times 10^{-33} \quad \text{cm}, \qquad 2.71 \times 10^{-43} \quad \text{s}, \qquad 2.43 \times 10^{18} \quad \text{GeV}$$

この単位系では (2.2) 式のアインシュタイン・ヒルベルト項は，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{EH}} = \sqrt{-g}\frac{1}{2}R \tag{2.7}$$

という簡単な形に書くことができる．ただし以下で，必要に応じて M_{P}，あるいは $8\pi G_0$ を復元して表示することもある．

さて，もう 1 点注意しておきたい．(2.1) 式の第 2 項は，スカラー場 φ の運動エネルギー項のようにみえる．しかし少し違っている．第 1 に，φ^{-1} という特異性を示すような形になっている．また ω という係数がかかっている．しかし，普通の場の理論では，スカラー場の運動エネルギー項はもっと簡単な形をしている．

実際には，新しい場を再定義することによって，普通のような**正準形**に書き直すことが可能である．そのためには，

$$\varphi = \frac{1}{2}\xi\phi^2, \qquad \omega = \frac{1}{4\xi} \tag{2.8}$$

という関係によって新しい場 ϕ と新しい定数 ξ を導入する．そうすると (2.1) 式の第 2 項は確かに正準形

$$\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right) \tag{2.9}$$

と書き直せることが確かめられる．上の式で全体にかかるマイナス符号は，これがゴースト場ではない，普通の場，すなわち正のエネルギーをもつ場であることに対応している*．

この書き方で (2.1) 式を書き直すと，

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\xi\phi^2 R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + L_{\mathrm{m}}\right) \tag{2.10}$$

となる．(2.1) 式に現れた「特異性」は見かけにすぎない．

しかし，B–D はなぜ普通でない定義 φ を用いたのだろうか．確かにあとでみるように，ある場面では ϕ よりも φ の方が本質的な役割を果たす．しか

*$\eta^{00} = -1$ だから，時空が平坦な場合，(2.9) 式は $\dot{\phi}^2/2 - \cdots$ となる．

し，運動エネルギー項が正準形でないと，いろいろな常識的な解釈が通用しなくなることが多い．その危険性は避けたほうが安全のように思われるので，ここでは ϕ のほうを用いることにした．

また，運動エネルギー項が正準形になっているスカラー場は質量の次元をもつが，(2.8) 式からわかるように，φ は (質量)^2 の次元をもつ．普通の量子場の理論では，発散などの性質をみる際に場の次元が重要な指標となる．その際によけいな混乱を生じないためにも ϕ のほうが扱いやすい．

ただ (2.8) 式の第 1 式によると，φ に対して 1 つの符号のみをとるように制限していることになる．φ が符号を変えるような領域にまで理論を使う場合には，ϕ を使う理論では対応しきれないはずである．しかし，そのような極端な場合は考慮しないこととする．実際 (2.3) 式によると，そのような場合，実効重力定数が無限大を通過するという状況になる．重力定数がマイナスになると重力が斥力という，きわめて不自然な状況となることを注意しておこう．

ところで，あとで宇宙論的応用を考える場合，(2.10) 式のままでは，直ちに困難が生ずる可能性が高い．そこで少しだけもとの模型を拡張して，

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\xi\phi^2 R - \frac{1}{2}\epsilon g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + L_{\rm m}\right) \tag{2.11}$$

としておく．つまり，スカラー場の運動エネルギーにもう 1 つの定数パラメータ $\epsilon = \pm 1$ を導入しておく (ω としてマイナスの値を許すのと同じことだが，混乱を防ぐために ω は常に正とし，その代わり符号を表す ϵ を導入しておく)．$\epsilon = -1$ であれば，ϕ はゴーストで，そのエネルギーはマイナスを意味する．このエネルギーが大きくなると全体のエネルギーもマイナスとなり，物理的に許されない事態を引き起こす．しかし非最小結合が存在する場合，必ずしもそういう結論にはならないことが間もなく示される．また，$\epsilon = -1$ が現実性をもつかもしれないことについては，後の章で議論する．

このラグランジアンについてもう 1 つ重要な点を指摘しておかなければならない．それは物質のラグランジアン $L_{\rm m}$ が ϕ を含まないと仮定されていることである．これは 1 章で触れたように，等価原理を乱さないためである．ϕ が物質には結合しないという仮定だが，それではスカラー場は物質との相互

作用によって観測される可能性がなくなってしまうのではないか，とも思われよう．実はあとでみるように，ラグランジアンでみると結合しないが，運動方程式においては結合するのである．しかし，ラグランジアンには直接の結合がないということで，結果として現れる結合には制限がつく．それが等価原理を満たすようになっているのである．そのことはすぐに示すが，簡単にいえば，次のようになるだろう．

たとえば，物質として質点を考えたとしよう．一般相対論では，質点の運動方程式は**測地線** (geodesic) である．これは質点の質量を含まないので，等価原理 (詳しくいうと，弱い意味の等価原理，あるいは**弱い等価原理** (weak equivalence principle ; WEP)) が自動的に満たされている．この測地線の方程式は，

$$I_{\rm m} = m \int {\rm d}s \tag{2.12}$$

を変分して得られる．ここで，m は質点の慣性質量である．もしラグランジアンのレベルでスカラー場が物質結合をもつとすると，(2.12) 式にも ϕ が含まれることになる．それは $m\times$測地線方程式という形の式の右辺に，「源」の項としてはいってくるだろう．そうすると，測地線の方程式は $=0$ とはならず，m のはいった式となり，したがって WEP は破れることになる．これはまた，他の相互作用，たとえば電磁的相互作用や強い相互作用などがない場合でも，質点のエネルギーが共変的な意味でも保存されないことをも意味する．WEP がエトベッシュ(Eötvös) の実験や，自らのさらに高精度の実験によって確かめられていることからみて，これは望ましくないということで，Dicke は ϕ の直接の物質結合を排除したのであった．物質が場の場合，これがどんな状況になるかは，次に述べる．

2.2 運動方程式

ラグランジアン (2.11) 式から運動方程式を求めよう．途中，かなり複雑な

点もあるので，まず結果を示しておこう．

$$2\varphi G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + T^{\phi}_{\mu\nu} - 2\left(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu\right)\varphi \tag{2.13}$$

$$\Box\varphi = \zeta^2 T \tag{2.14}$$

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{2.15}$$

ここで，φ は (2.8) 式によって定義された，いわばもともとの B–D スカラー場である．(2.13) 式は，もちろん (2.11) 式を $g^{\mu\nu}$ について変分したものである．左辺に 2φ が現れることはすぐにわかるが，右辺の φ の 2 階微分を含む項の導き方の詳細は，付録 A に与えてある．

また $T_{\mu\nu}$ は，物質のエネルギー・運動量テンソルで，次のように定義される．

$$\frac{\delta\left(\sqrt{-g}L_{\rm m}\right)}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,T_{(\mu\nu)} \tag{2.16}$$

添字の $(\mu\nu)$ における括弧は，対称化を意味する．すなわち，

$$A_{(\mu\nu)} \equiv \frac{1}{2}\left(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}\right).$$

特にフェルミオンのエネルギー・運動量テンソルには，一般的にいって反対称部分が生ずるが，その場合には重力場も計量テンソルよりもさらに基本的な**四脚場** (tetrad) によって記述される．しかし，しばらくはそのような複雑さには立ち入らないことにし，したがってエネルギー・運動量テンソルも添字について対称なものとしてよい．また，T は $T_{\mu\nu}$ の**対角和** (trace) で，

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \tag{2.17}$$

である．

一方，$T^{\phi}_{\mu\nu}$ は，スカラー場 ϕ についての同様なエネルギー・運動量テンソルである．すなわち，(2.16) 式の $L_{\rm m}$ の代わりに，

$$L^{\phi} = -\epsilon\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \tag{2.18}$$

を代入することによって得られる．具体的に書くと，

$$T^{\phi}_{\mu\nu} = \epsilon\left(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\partial\phi\right)^2\right) \tag{2.19}$$

である．ここで，

$$(\partial\phi)^2 \equiv g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$$

とした．表現を簡略にするために，今後もこの記号を使うことがある．

(2.14) 式は次のようにして得られる．まず (2.11) 式を ϕ について変分すると，

$$\xi\phi R + \epsilon\Box\phi = 0 \tag{2.20}$$

を得る．もちろん $\Box$ はスカラー場に対する共変的ダランベルシャンで，

$$\Box\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\right)\phi \tag{2.21}$$

と定義される．(2.20) 式に ϕ を掛けると，

$$2\varphi R + \epsilon\phi\Box\phi = 0 \tag{2.22}$$

となる．

一方，(2.13) 式の対角和をとる．その際，

$$g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = -R \tag{2.23}$$

となることを使うと，

$$-2\varphi R = T - \epsilon(\partial\phi)^2 - 6\Box\varphi \tag{2.24}$$

が得られる．(2.22) 式と (2.24) 式から φR を消去すると，

$$\epsilon\left(\phi\Box\phi + (\partial\phi)^2\right) + 6\Box\varphi = T \tag{2.25}$$

となるが，ここで，

$$\Box\phi^2 = 2\left(\phi\Box\phi + (\partial\phi)^2\right) \tag{2.26}$$

を使うと，けっきょく (2.14) 式

$$\Box\varphi = \zeta^2 T \tag{2.27}$$

を得る．ここで，

$$\zeta^2 = \frac{1}{6+\epsilon\xi^{-1}} = \frac{1}{6+4\epsilon\omega} \tag{2.28}$$

を導入した．(2.27) 式は，スカラー場が物質のエネルギー・運動量テンソルの対角和を源としていることを示している．ラグランジアンでは物質に結合していなかったのに，なぜ運動方程式では結合が出てくるのだろうか，その

疑問についてはあとで改めて論ずる．いずれにせよ，(2.27)，(2.28) 式から，$\xi \to 0$，あるいは $\omega \to \infty$ でスカラー場の物質結合が消滅することがわかる．すなわち，理論はアインシュタイン理論に移行する．これが，このパラメータの最も重要な意味である．しかし，普通の意味で観測されないとしても，宇宙論的には暗黒物質として役割を果たす可能性は残っており，これもあとで議論される．

さらに次元解析から，ζ^2 は (質量)$^{-2}$ の次元をもつべきことがわかるが (φ は (質量)^2 の次元をもつことに注意)，それは $M_{\rm P}^{-2} = 8\pi G_0$ によって供給される．それをはっきりと書くと，

$$\zeta^2 = M_{\rm P}^{-2}\frac{1}{6+\epsilon\xi^{-1}} = \frac{4\pi G_0}{3+2\epsilon\omega} \tag{2.29}$$

となる．

ついで，(2.15) 式の導出に移ろう．これはもちろん物質の運動方程式から導かれるべきものだが，個々の物質場の特性にはよらず，ϕ 物質結合がないという仮定から直接導くこともできるので，それを示す．実際それは，(2.13) 式におけるビアンキ (Bianchi) 恒等式の結果にほかならない．すなわち，(2.13) 式を反変形にしておき，その両辺に ∇_μ を掛けると，

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = -\nabla_\mu T_\phi^{\mu\nu} + 2\left([\nabla^\nu, \Box] + G^{\mu\nu}\partial_\mu\right)\varphi \tag{2.30}$$

が得られる．右辺最後の項は，(2.13) 式の左辺で ∇_μ が φ にかかった部分からの寄与である．この右辺が恒等的にゼロとなることが示せるのだが，やはり複雑なので付録 B にまわすこととする．これによって (2.15) 式が導かれ，物質のエネルギーの共変的保存則は，スカラー場によって影響を受けないことがわかる．もし物質と ϕ の相互作用を表す項が (2.11) 式の中に存在したとすると，(2.20) 式の右辺にそれからの寄与が現れ，その結果 (2.30) 式の右辺は消えず，したがって (2.15) 式も成り立たなくなる．この詳細については，やはり付録 B を参照されたい．

物質として，特に質点を考えた場合，この保存則は世界線が測地線であることの必要十分条件である．また測地線であることが等価原理を保証するの

だから，けっきょく，等価原理は，スカラー場が L_{m} の中に現れないことによって保証されるのである．

2.3 弱い場の近似

上に導いた運動方程式の結果，どんな物理的結果が生ずるか，まず場の強さが弱い極限で調べよう．これは，アインシュタイン方程式のニュートン的近似に相当するものである．

まずスカラー場について，

$$\phi(x) = v + Z\sigma(x) \tag{2.31}$$

とおく．ここで，v は質量の次元をもった定数で．量子場の理論でいえば，「真空期待値」に相当するといってもよい．またあとで調べる宇宙論的状況では宇宙論的「背景場」という意味をもつ．また Z も定数で，その意味はすぐあとで議論する．いずれにせよ，

$$v \gg Z\sigma \tag{2.32}$$

とみなして，σ について線形化する．

第 0 次の近似では $\phi = v$ で，このとき (2.11) 式の第 1 項は，

$$\sqrt{-g}\frac{1}{2}\xi v^2 R \tag{2.33}$$

となる．これはアインシュタイン・ヒルベルト項 (2.2) 式，あるいは (2.7) 式と同じ形をしているので，これより，

$$\xi v^2 = M_{\mathrm{P}}^2 = 1 \tag{2.34}$$

を得る．すなわち，v は本質的にプランク質量を与えるものである．しかしプランク単位系では，(2.34) 式より，

$$v = \xi^{-1/2} \tag{2.35}$$

であることも注意しておこう．

さて (2.31) 式より ((2.35) 式も使って)，

$$\varphi \approx \frac{1}{2} + \xi^{1/2}Z\sigma \tag{2.36}$$

である．これを (2.14) 式に代入すると，

$$\Box\sigma = \xi^{-1/2} Z^{-1} \zeta^2 T \tag{2.37}$$

を得る．この右辺の係数は，実はもっと簡単に ζ となることがあとでわかる ((2.126) 式を見よ)．

ニュートン的極限では物質は止まっているので，その質量密度を ρ とすると，

$$T = -\rho \tag{2.38}$$

となる．このとき，(2.37) 式の解 σ も時間には依存しないので，(2.37) 式は，

$$\vec{\nabla}^2 \sigma(\vec{r}) = -\xi^{-1/2} Z^{-1} \zeta^2 \rho(\vec{r}) \tag{2.39}$$

となる．質量分布が点状，総質量 M の場合，このポアソン (Poisson) の方程式の解は，

$$\sigma(\vec{r}) = \frac{M}{M_{\rm P}} \xi^{-1/2} Z^{-1} \zeta^2 \frac{1}{4\pi r} \tag{2.40}$$

である．ただし，右辺で次元をはっきりさせるため，$M_{\rm P}^{-1}$ を補っておいた．

次に計量についても同様の線形化を行う．普通の方法で，

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + M_{\rm P}^{-1} h_{\mu\nu}(x) \tag{2.41}$$

とおき，$h_{\mu\nu} \ll M_{\rm P}$ という条件で 1 次の項のみを残す．その結果，

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2M_{\rm P}} \left[-\Box h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\lambda h^\lambda_\nu + \partial_\nu \partial_\lambda h^\lambda_\mu - \partial_\mu \partial_\nu h - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \left(\partial_\rho \partial_\sigma h^{\rho\sigma} - \Box h \right) \right] \tag{2.42}$$

を得る．ここで，

$$h = h^\mu_\mu \tag{2.43}$$

で，添字は $\eta_{\mu\nu}$ によって上げ下げする．(2.36) 式と (2.43) 式を (2.13) 式に代入する．ただし左辺では $\phi = v$ とおく．また $\mathcal{O}(\sigma^2)$ の項を落とすから，

$$T^\phi_{\mu\nu} \approx 0 \tag{2.44}$$

としてよい．しかし，

$$\Box \phi^2 \approx 2vZ \Box \sigma, \qquad \nabla_\mu \nabla_\nu \phi^2 \approx 2vZ \partial_\mu \partial_\nu \sigma \tag{2.45}$$

である．それらを使って (2.13) 式は，

$$\xi\frac{v^2}{2M_{\rm P}}(-\Box h_{\mu\nu}+\cdots)=T_{\mu\nu}-2vZ\xi\left(\eta_{\mu\nu}\Box-\partial_\mu\partial_\mu\right)\sigma \tag{2.46}$$

となる．さらに項を入れ換え，また (2.35) 式も使って v を消去すると，けっきょく (2.13) 式は，

$$\begin{aligned}&\Box h_{\mu\nu}-\partial_\mu\partial_\lambda h^\lambda_\nu-\partial_\nu\partial_\lambda h^\lambda_\mu+\partial_\mu\partial_\nu h+Z\eta_{\mu\nu}\left(\partial_\rho\partial_\sigma h^{\rho\sigma}-\Box h\right)\\&\quad-4Z\xi^{1/2}\left(\eta_{\mu\nu}\Box-\partial_\mu\partial_\mu\right)\sigma=-2M_{\rm P}^{-1}T_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{2.47}$$

となる．左辺最後の項は，2 つの場 $h_{\mu\nu}$ と σ の**混合** (mixing) の形となっているが，これはまさに非最小結合からきていることを覚えておこう．

この混合を取り除くために**対角化** (diagonalization) を行う．そのために，

$$\chi_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h-2Z\xi^{1/2}\eta_{\mu\nu}\sigma \tag{2.48}$$

とおいて新しい場 $\chi_{\mu\nu}$ を導入する．この式の逆は，

$$h_{\mu\nu}=\chi_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\chi-2Z\xi^{1/2}\eta_{\mu\nu}\sigma \tag{2.49}$$

と書くことができる．これを (2.46) 式に代入する．さらに座標条件として，

$$\partial_\lambda\chi^\lambda_\nu=0 \tag{2.50}$$

を課すると，混合のない，

$$\Box\chi_{\mu\nu}=-\frac{2}{M_{\rm P}}T_{\mu\nu} \tag{2.51}$$

が得られる．

重力場 $\chi_{\mu\nu}$ を作り出す源が質量 M の静止質点である場合，(2.51) 式の解は，

$$\chi_{00}(\vec{r})=2\frac{M}{M_{\rm P}}\frac{1}{4\pi r},\qquad \text{他の成分}=0 \tag{2.52}$$

となる．

以上で計算した場 $\chi_{\mu\nu}$, σ の中を動くもう 1 つの質点を考え，その質量を m とする．ところで，前に述べたように，質点の運動方程式は測地線であるので，「重力」のポテンシャル V は普通の場合と同じく，

$$V=-\frac{1}{2}\frac{m}{M_{\rm P}}h_{00} \tag{2.53}$$

で与えられる．(2.49) 式によると，

$$h_{00} = \chi_{00} + \frac{1}{2}\chi + 2Z\xi^{1/2}\sigma = \frac{1}{2}\chi_{00} + 2Z\xi^{1/2}\sigma \tag{2.54}$$

である．ここで，$\chi = -\chi_{00}$ であることを使った．こうして，

$$V = V_\chi + V_\sigma \tag{2.55}$$

となる．ただし，

$$V_\chi = -\frac{1}{4}\frac{m}{M_{\rm P}}\chi_{00} \tag{2.56}$$

$$V_\sigma = -\frac{m}{M_{\rm P}}Z\xi^{1/2}\sigma \tag{2.57}$$

である．

さらに (2.52) 式と (2.40) 式を代入すると，

$$V_\chi = -\frac{1}{2}\frac{mM}{M_{\rm P}^2}\frac{1}{4\pi r} \tag{2.58}$$

$$V_\sigma = -\frac{mM}{M_{\rm P}^2}\zeta^2\frac{1}{4\pi r} \tag{2.59}$$

となる．

スピン 2 の場からくる部分 V_χ とスピン 0 の場からくる部分 V_σ とは，関数形として全く同じ形をしている．これはまた，スカラー場による力も，その結合の強さはテンソル場の場合と同様に，物体の慣性質量に比例することを示している．そのため，スカラー力も含めて，物体はすべて同じ加速度で落下すること，すなわち WEP が成り立つことを意味する．そうなった理由は，スカラー場の源が T であるからだが，さらにさかのぼると，スカラー場は，混合を通じてそもそも $T_{\mu\nu}$ に結合することの結果である．たとえば T_{00} は，その系の全エネルギーであり，そのどれだけが構成粒子の運動エネルギーで，どれだけが束縛エネルギーであるかなどには全く依存しない．その意味で WEP は，**組成非依存性** (composition-independence) ともよばれ，一般相対論はこれを満たす理論として作られたのだが，B–D 理論におけるスカラー場も，この性質を完全に引き継ぐことになる．

(2.58) 式と (2.59) 式をまとめると，

$$V = -\frac{Gm^2}{r} \tag{2.60}$$

となる．ここで，

$$G = \frac{4+2\epsilon\omega}{3+2\epsilon\omega}G_0 \tag{2.61}$$

である．最初，(2.2) 式のアインシュタイン・ヒルベルト項に現れた定数 G_0 を基本的な重力定数と考えたが，スカラー場からの寄与も加わった G こそが，ニュートンの万有引力定数として観測にかかるものとなる．G_0 は，いわばテンソル重力に関する重力定数であるが，キャベンディシュ(Cavendish) の実験で測定されるのは，スカラー場からの寄与を含んだもので，それが G なのである．

静止した物質の間の力としては，スカラー場の部分を分離して取り出すことはできないが，一般相対論のテストとなる実験では，その分離が可能となる．次にはそれを議論する．

(2.61) 式によると $\omega \to \infty$ で $G \to G_0$ となるが，これは前に述べたとおり，この極限ではスカラー場の物質結合がなくなってしまうからである．

なお (2.59) 式を見ると，σ の交換によって生ずる力も，

$$\zeta^2 > 0 \tag{2.62}$$

であるかぎり引力である．これは σ が「普通の」スカラー場であること，すなわちゴーストではないことを表している．一方，(2.28) 式によると，(2.62) 式は，$\epsilon = -1$ であっても成り立ちうる．つまり，その場合は，

$$\omega < \frac{3}{2} \quad \text{または} \quad \xi > \frac{1}{6} \tag{2.63}$$

でありさえすればよい．これは，もとになったスカラー場 ϕ がゴーストであっても，「物理的な」役割を果たす σ は必ずしもゴーストとはならないことを示している．これについては 3 章でも議論する．

2.4 PPN 近似

実験的な面で一般相対論と比較するためには，ニュートン近似より一歩進

まなければならない．それが parametrized post-Newtonian (PPN) 近似である．これは一般相対論におけるシュワルツシルト (Schwarzschild) 解

$$-g_{00} = 1 - \frac{a}{r} \tag{2.64}$$

$$g_{rr} = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \tag{2.65}$$

を a/r の 1 次，あるいは 2 次まで展開し，それを一般化したものである．すなわち，

$$-g_{00} \approx 1 - \frac{a}{r} + \frac{\beta - \gamma}{2}\frac{a^2}{r^2} \tag{2.66}$$

$$g_{rr} \approx 1 + \gamma\frac{a}{r} \tag{2.67}$$

のように，エディントン (Eddington) パラメータ β, γ で表す．これについての予備知識は付録 C にまとめてある．一般相対論の場合は，

$$\beta = \gamma = 1 \tag{2.68}$$

で，これがほんとうに成り立っているかどうかが一般相対論のテストとみなされている．現在の太陽系実験などは，このパラメータで解析されている．昔から知られているものとしては，

- 太陽の近くでの光の曲がり：

$$\Delta\varphi = \frac{1+\gamma}{2}\frac{2a}{r_0}$$

- 水星の近日点移動：

$$\Delta\varphi = \frac{2-\beta+2\gamma}{3}\frac{3a\pi}{l}$$

- Shapiro の遅れ (レーダーエコー)：

$$\Delta t = 2a\left(1 + \frac{1+\gamma}{2}\ln\frac{4r_1 r_2}{r_0^2}\right)$$

などがあるが，Viking 計画ではこれらを全部総合し，太陽系の全部の惑星運動の理論値を β, γ で表し，最小二乗法でそれらの値の最適値を決めている．現在，最も正確な値としては，

$$\gamma = 1.000 \pm 0.001, \qquad \beta = 0.99 \pm 0.02 \tag{2.69}$$

とされている．

B–D 理論の帰結も，この PPN 形式の中に納まることを示す．今の場合，スカラー場の寄与として g_{rr} の $1/r$ の項の係数を変えることがわかる．すなわち，γ を 1 からずらせる効果を生ずる．この最低次の効果に話を限れば，g_{00} の $1/r^2$ の項は無視してよい．途中少し面倒な式が続くが，必要な結果は後出する (2.91) 式であり，それによって ω に加えられる制限は (2.93) 式である．

まず「アインシュタイン方程式」(2.13) 式に注目しよう．さらに，左辺が $R_{\mu\nu}$ になるように変形しておく．その際に (2.24) 式を利用する．さらに，今は「外部解」を求めるのだから，

$$T_{\mu\nu}=0 \tag{2.70}$$

とおく．

また，この近似では，(2.14) 式の解としては (2.40) 式と同じ種類の解

$$\varphi \approx \frac{1}{2}+\zeta^2\frac{m}{4\pi r} \tag{2.71}$$

を採用すればよい．これを (2.19) 式に代入すると，

$$T^{\phi}_{\mu\nu}\sim \mathcal{O}(r^{-4}) \tag{2.72}$$

となり，無視してよい (スカラー場も静的だから，時間微分の項はない)．これらのことを考慮してけっきょく (2.13) 式は，

$$2\varphi R_{\mu\nu}=(g_{\mu\nu}\Box+2\nabla_\mu\nabla_\nu)\,\varphi\equiv K_{\mu\nu} \tag{2.73}$$

となる．一方，左辺においては，普通の場合と同じく，

$$R_{00}=e^{-\lambda+\nu}\left(\frac{1}{2}\nu''+\frac{1}{4}\nu'^2-\frac{1}{4}\nu'\lambda'+\frac{\nu'}{r}\right) \tag{2.74}$$

$$R_{rr}=-\frac{1}{2}\nu''-\frac{1}{4}\nu'^2+\frac{1}{4}\nu'\lambda'+\frac{\lambda'}{r} \tag{2.75}$$

となる．ここで，

$$g_{00}=-e^{\nu(r)},\qquad g_{rr}=e^{\lambda(r)} \tag{2.76}$$

とおいた．

$K_{\mu\nu}$ には $\Box\varphi$ が出てくるが，これは (2.27) 式で与えられ，また (2.70) 式により，けっきょく，

$$\Box\varphi=0 \tag{2.77}$$

である．さらに φ が時間に依存しないことから $K_{00}=0$，したがって，

$$\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{1}{4}\nu'\lambda' + \frac{\nu'}{r} = 0 \tag{2.78}$$

となり，これは一般相対論の場合と同じである．

ここで，(2.66) 式と (2.76) 式とから，

$$\begin{aligned} \nu = \ln(-g_{00}) &\approx \ln\left(1 - \frac{a}{r} + \frac{\beta-\gamma}{2}\frac{a^2}{r^2}\right) \\ &\approx -\frac{a}{r} + \frac{\beta-\gamma-1}{2}\frac{a^2}{r^2} \end{aligned} \tag{2.79}$$

同様にして，

$$\begin{aligned} \lambda = \ln(g_{rr}) &\approx \ln\left(1 + \gamma\frac{a}{r}\right) \\ &\approx \gamma\frac{a}{r} \end{aligned} \tag{2.80}$$

を得る．

これらを微分して，

$$\left.\begin{aligned} \nu' &\approx \frac{a}{r^2} - (\beta-\gamma-1)\frac{a^2}{r^3} \\ \nu'' &\approx -2\frac{a}{r^3} + 3(\beta-\gamma-1)\frac{a^2}{r^4} \\ \lambda' &\approx -\gamma\frac{a}{r^2} \end{aligned}\right\} \tag{2.81}$$

なども得られる．

これらを (2.78) 式に代入する．a/r^3 と a^2/r^4 までの項のみを残す．a/r^3 の項は互いに消し合ってしまい，残りは，

$$\frac{-1-\gamma+2\beta}{4}\frac{a^2}{r^4}$$

となる．これがゼロとならなければならないので，

$$\beta = \frac{1+\gamma}{2} \tag{2.82}$$

という関係が出てくる．

次に R_{rr} だが，$R_{00} = 0$ と組み合わせると，

$$R_{rr} = \frac{\nu' + \lambda'}{r} \tag{2.83}$$

となることがわかる．そこで (2.81) 式を使うと，

$$R_{rr} \approx (1-\gamma)\frac{a}{r^3} \tag{2.84}$$

となる．ここで a^2/r^4 の項は落としたが，今の目的にはこれで十分である．もちろん，これにかかる係数として，

$$2\varphi \approx 1 \tag{2.85}$$

とおいてかまわない．

次に K_{rr} の第 2 項を計算する．

$$2\nabla_r \nabla_r \varphi = (\partial_r - \Gamma^r_{rr})\,\varphi'(r) \tag{2.86}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \Gamma^r_{rr} &= \frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{rr} = \frac{1}{2}\lambda'(r) \\ &= -\frac{\gamma}{2}\frac{a}{r^2} \end{aligned} \tag{2.87}$$

である．最後のところで (2.81) 式を使った．これを (2.86) 式に代入し，(2.71) 式を利用すると，

$$K_{rr} \approx \zeta^2 \frac{m}{\pi}\frac{1}{r^3} \tag{2.88}$$

を得る．ここで再び a/r^4 の項を捨てた．(2.84) 式と比べると，ともに $1/r^3$ の形をしていることがわかる．したがって，

$$1 - \gamma = \zeta^2 \frac{m}{\pi a} \tag{2.89}$$

が得られる．

ところでシュワルツシルト半径は，テンソル場による重力の効果だから，G_0 を使って，

$$a = 2G_0 m = \frac{2m}{8\pi} = \frac{m}{4\pi} \tag{2.90}$$

と表される．したがって，最終的に，

$$\gamma = 1 - 4\zeta^2 \tag{2.91}$$

が得られる．こうして ζ^2 が純粋の一般相対論からのずれを表すことが確かめられた．$\omega \to \infty$ に対しては確かに $\gamma \to 1$ となる．

また，(2.82) 式によれば，

$$\beta = 1 - 2\zeta^2 \tag{2.92}$$

となる．

(2.69) 式によると，

$$4\zeta^2 \lesssim 10^{-3}$$

となるが，これより，

$$\omega \gtrsim 10^3 \quad \text{または} \quad \omega^{-1} \lesssim 10^{-3} \tag{2.93}$$

となっていなければならないことが結論される．β に関する制限は 1 桁弱いので，けっきょく (2.93) 式が現在得られる最も厳しい制限ということになる．

これに関連して，太陽の扁平率 (solar oblateness) という問題が議論されたことがある．Dicke が (2.93) 式のように (ω^{-1} でいえば) 小さな値ではなく，1 に近い値を期待したのは当然であったに違いない．もしそうだとすると，アインシュタインの理論にどれくらい影響するのだろうか．一般相対論によると，惑星，たとえば水星の近日点は，軌道運動の 1 周期の間に角度にして，

$$\Delta\varphi = \frac{2 - \beta + 2\gamma}{3} \frac{3a\pi}{l} \tag{2.94}$$

だけ移動する．ここで，a は太陽のシュワルツシルト半径，l は水星の平均軌道半径である．実際の値を代入すると，

$$\Delta\varphi = \frac{2 - \beta + 2\gamma}{3} \times 43.03'' \ \mathrm{cy}^{-1} \tag{2.95}$$

となる．ここで cy は 100 年を意味する．43 秒という値は，ニュートン力学による計算値と観測値とのギャップをみごとに埋め，それが Einstein に，一般相対論が正しいという自信を初めてもたせたと伝えられている．これは $(2 - \beta + 2\gamma)/3$ が 1 に非常に近いことを示す．

一方，(2.28)，(2.91)，(2.92) 式によれば，

$$\frac{2 - \beta + 2\gamma}{3} = 1 - 2\zeta^2 = \frac{2 + 2\epsilon\omega}{3 + 2\epsilon\omega} \tag{2.96}$$

を得る．たとえば，$\omega = 1$ とした場合，

$$\text{(2.96) 式の左辺} = \begin{cases} 0.8 & (\epsilon = +1 \text{ の場合}) \\ 0 & (\epsilon = -1 \text{ の場合}) \end{cases}$$

となる．おおまかにいって，ω を 1 に近い値にすると，100 年につき 43 秒という重要な結果を大幅に変えてしまうということになる．

そこで Dicke は，理論と観測を結びつけるところに問題があるのではないかと考え，太陽の質量分布が完全には球対称ではないかもしれない，という疑いを提唱した．いうまでもないが，(2.94) 式はこれが球対称であり，したがって重力場も球対称なシュワルツシルト解であるとして得られたものである．

太陽が小さな**四重極能率** J_2 をもつとして計算すると*，(2.94) 式における $(2-\beta+2\gamma)/3$ には補正項として，

$$\frac{a_\odot}{2m} J_2 \approx 3 \times 10^{-4} \left(J_2/10^{-7}\right) \tag{2.97}$$

を加えることになる．ここで $a_\odot$ は太陽の平均半径，m は水星の質量である．もちろん，太陽が自転しているため，遠心力が生じ，そのための扁平率があるが，それは大体のところ $\sim 10^{-7}$ 程度と見積もられている．そうだとすると，(2.97) 式は $\sim 10^{-4}$ であり，(2.93) 式を大きく変える可能性はない．

しかし Dicke は直接太陽の形を測定し，$J_2 \sim 10^{-5}$ という「大きな」値を得た．これを使うと，$(2-\beta+2\gamma)/3$ が 1 から $\sim 10^{-1}$ 程度ずれていてもよいことになり，これから，

$$\omega \approx 5 \quad \text{または} \quad \omega^{-1} \approx 0.2 \tag{2.98}$$

くらいの値が許されることがわかる．これならば，1 に「近い」値とみなしてよいだろう．

この結果は論議を巻き起こした．扁平率の測定は，原理は簡単だが細心の注意を要する実験であり，その後，別の測定が行われたが，いずれも $J_2 \sim 10^{-6}$ 程度の結果を出しており，Dicke がなぜ 1 桁大きい値を得たのか，はっきりした結論は得られていない．太陽系実験の今後の課題として，β, γ のほかに，J_2 を独立に求めることも計画されている．

---

*太陽の慣性能率を A, C として $J_2 = (C-A)/(m_\odot a_\odot^2)$．

もう1つ，注意すべき重要な点がある．これまでスカラー場の質量はゼロと考えてきた．つまり，出発点のラグランジアン(2.1)式，あるいは(2.11)式で ϕ の質量項を入れなかった．これはB–D理論の重要な仮定の1つである．はじめから複雑なものを導入する必要はないとはいうものの，量子論的な効果によってこの仮定は修正される可能性が高い．そのことは，ディラトン理論に関する4.3節でも議論されるが，もしその結果，スカラー力の到達範囲が有限となり，しかも太陽系の大きさより小さいとなったとすると，B–D理論のパラメータは，太陽系実験によっては全く制限されなくなる．その場合は，第5の力のタイプの現象となる．ただし，ディラトン理論がほとんど必然的にWEPを破るのに対して，B–Dの場は**組成依存性** (composition-dependence) を示すことはない．この結論は量子論的効果をとり入れても変わらない点が注目される．

2.5　物質としてのフェルミオン場

これまでは，物質場の詳しい内容は問わず，単純に質量分布としての効果が現れる場合に限ってきた．しかし，統一理論との関係を論ずるような場合，物質として素粒子の場を考える必要が出てくる．特にフェルミオンについては特有の複雑さがある．それについて簡単にみておく．これはあとで共形変換を考える際に重要となる．

簡単な実例として，物質場としてはフェルミオン場 ψ を考える．平坦なミンコフスキー時空では自由なフェルミオン場のラグランジアンは，

$$L_{\rm m} = -\overline{\psi}\,(\partial\!\!\!/ + m)\,\psi \tag{2.99}$$

と書かれる．ここで m は質量で，また，

$$\partial\!\!\!/ = \gamma^{\mu}\partial_{\mu} \tag{2.100}$$

である．

整数スピンでないこのような場を一般相対論の枠に入れるには，計量テンソルよりさらに基本的な**四脚場**の概念が必要となる．その詳細については他

の文献に譲り，ここでは必要最低限の説明にとどめたい．

第1に，スピノルの概念はミンコフスキー時空特有のもので，テンソルのようにそのまま曲がった時空に拡張することはできない．そこで，曲がったリーマン (Riemann) 時空の各点に付属した接時空としてのミンコフスキー時空を考え，ψ はその上で定義されたものとする．このミンコフスキー時空とリーマン時空とをつなぐのが**四脚場** b^i_μ である．ここで，μ はリーマン時空でのテンソルの添字，i はミンコフスキー時空におけるローレンツ (Lorentz) 変換に伴うテンソルの添字であり，いずれも 0 から 3 までの値をとるものとする．これは次の関係によってリーマン時空の計量テンソルと結ばれている．

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ij} b^i_\mu b^j_\nu = b^i_\mu b_{\nu i} \tag{2.101}$$

すなわち，b^i_μ は $g_{\mu\nu}$ の平方根のようなものと考えてよく，そもそも ψ がテンソル量の平方根のようなものであることに対応している．また (2.101) 式での最後の変形は，四脚場についてもローレンツ変換の添字はミンコフスキー計量

$$\eta_{ij} = \eta^{ij} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1) \tag{2.102}$$

によって上げ下げできることを示している．また**逆四脚場** $b^{\mu i}$ は，

$$b^{\mu i} = g^{\mu\nu} b^i_\nu \tag{2.103}$$

によって定義され，これは逆計量 $g^{\mu\nu}$ の平方根とみなしてよい．

$$g^{\mu\nu} = \eta_{ij} b^{\mu i} b^{\nu j} \tag{2.104}$$

スピノル ψ と同様，γ 行列もミンコフスキー時空の上でのみ定義され，したがってその添字は本来 i である．一方，(2.100) 式における ∂_μ の添字はあくまで μ である．これら異種類の変換性をもった量を結びつけるのが四脚場で，(2.100) 式は，

$$\not{\partial} = b^{\mu i} \gamma_i \partial_\mu \tag{2.105}$$

と変更される．

この部分についてはさらに変更が必要で，∂_μ は，スピン接続，トーション (torsion) などを含む**共変微分** D_μ によっておき換えなければならない．しかし今の場合，それらが物理的に重要な効果をもつことはないので，

$$D_\mu \approx \partial_\mu \tag{2.106}$$

とみなすことにする．この意味で (2.99) 式を変更して，

$$L_{\rm m} = -\overline{\psi}\left(b^{\mu i}\gamma_i\partial_\mu + m\right)\psi \tag{2.107}$$

とし，以後の議論の出発点とする．なお，全体のラグランジアンを ψ について変分すると，当然のことながら，曲がった時空でのディラック方程式

$$(\not{D} + m)\,\psi = 0 \tag{2.108}$$

が導かれる．

ミンコフスキー時空の場合でも，スピノル場のエネルギー・運動量テンソルは多少複雑な面がある．しかし，共変的な保存則 (2.15) 式はやはり成り立ち，またその対角和については簡単で，

$$T = \overline{\psi}\not{D}\psi = -m\overline{\psi}\psi \tag{2.109}$$

となる．

(2.107) 式において時空の曲がりは，最小結合としての $b^{\mu i}$ を通じてのみはいってくる．そのほかにも $\sqrt{-g}$ を通ずる寄与もあるが，それは $L_{\rm m}$ 全体にかかるもので，ψ を再定義することによって吸収され，実際の効果は現れないことがわかる．そこで，以前に求めた (2.48) 式をここに利用すればよい．

ところで，

$$b^{\mu i} \approx \eta^{\mu i} - \frac{1}{2}h^{\mu i} \tag{2.110}$$

である．なぜならば，これを (2.104) 式に代入すると，$\mathcal{O}(h^2)$ の項を落とす近似で，

$$g^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \tag{2.111}$$

が得られ，これはまた (2.41) 式とも整合する．なぜならばこれらの式から，

$$g_{\mu\lambda}g^{\lambda\nu} \approx \eta_{\mu\lambda}\eta^{\lambda\nu} + h_{\mu\lambda}\eta^{\lambda\nu} - \eta_{\mu\lambda}h^{\lambda\nu} = \delta^\nu_\mu \tag{2.112}$$

となり，計量とその逆との間の正しい関係を再現するからである．

さて (2.110) 式を (2.107) 式に代入し，さらに $h^{\mu i}$ として (2.48) 式で ν を i でおき換えたものを用いる．そうすると，

$$L_{\rm m} = -\overline{\psi}\left[\not{\partial} + m - \frac{1}{2}\left(\chi^{\mu i} - \frac{1}{2}\eta^{\mu i}\chi - 2Z\xi^{1/2}\eta^{\mu i}\sigma\right)\gamma_i\partial_\mu\right]\psi \tag{2.113}$$

を得る．これを，

$$L_{\rm m} = -\overline{\psi}\,(\partial\!\!\!/ + m + V) \tag{2.114}$$

と書くと，V が重力場のために生ずる相互作用の項ということになり，それは，

$$V = V_\chi + V_\sigma \tag{2.115}$$

の形となる．ただし，

$$V_\chi = -\frac{1}{2}\left(\chi^{\mu i} - \frac{1}{2}\eta^{\mu i}\chi\right)\gamma_i\partial_\mu \tag{2.116}$$

$$V_\sigma = Z\frac{\xi^{1/2}}{M_{\rm P}}\sigma\partial\!\!\!/ \tag{2.117}$$

である．

ここで，ψ によって表される粒子がほとんど静止しているとすると，

$$\gamma_0 \approx i, \qquad \partial_0 \approx -im \tag{2.118}$$

で，他の成分はゼロとみなしてよい．こうして，

$$V_\chi \approx -\frac{m}{2M_{\rm P}}\left(\chi_{00} + \frac{1}{2}\chi\right) \tag{2.119}$$

となり，(2.56) 式と一致する．

また (2.117) 式においては，第 0 次の方程式が成り立つとして，

$$\partial\!\!\!/ \approx -m \tag{2.120}$$

とおいてよく，したがって，

$$V_\sigma = -mZ\xi^{1/2}\sigma \tag{2.121}$$

となる．これも (2.57) 式と一致する．

(2.121) 式は，物質のラグランジアン (2.107) 式の中に相互作用項

$$L_{\psi\sigma} = -\overline{\psi}V_\sigma\psi = mZ\xi^{1/2}\overline{\psi}\psi\sigma \tag{2.122}$$

があることを意味する．これを含めた全体のラグランジアンから σ の方程式として，

$$\Box\sigma = -\frac{\partial L_{\psi\sigma}}{\partial\sigma} = Z\xi^{1/2}T \tag{2.123}$$

が導かれるはずである．ここで (2.109) 式を使った．一方，同じ方程式は (2.37) 式で得られているが，その右辺は $Z^{-1}\xi^{-1/2}\zeta^2 T$ で，(2.123) 式と異なっている．これらが一致するように Z を決めると，

$$Z = \sqrt{\xi^{-1}\zeta^2} = \frac{1}{\sqrt{6\xi + \epsilon}} = \xi^{-1/2}\zeta \tag{2.124}$$

となる．これを用いると (2.122) 式における係数は，

$$mZ\xi^{1/2} = m\zeta \tag{2.125}$$

となる．これを使うと (2.37) 式は

$$\Box\sigma = \zeta T \tag{2.126}$$

と簡単化される．

2.6 場の混合の役割

出発点となったラグランジアン (2.11) 式では，スカラー場と物質との結合はなかったのに，場の方程式 (2.27) 式ではなぜその結合が出てきたのだろうか．その鍵はやはり非最小結合にある．実際，(2.27) 式を導く際に重要だったのは (2.22) 式と (2.24) 式であるが，これらはいずれも非最小結合からの項 $2\varphi R$ を含んでいる．さらに，弱い場の極限の式 (2.46) 式をみると，非最小結合は，$h_{\mu\nu}$ の方程式の中に σ を登場させる役割を果たしていることがわかる．すなわち，$h_{\mu\nu}$ と σ の混合を起こさせている．

もし単純に，$h_{\mu\nu}$ はスピン 2 の場を表すと考えると，この言い方はおかしいと思われるだろう．しかし，2 階のテンソル場はスピン 1 とスピン 0 の成分も含んでおり，最終的な物理的状態ではスピン 2 のみを表すという構造になっている．今の場合，スピン 0 の成分が σ と結合するのである．そのために (2.46) 式では σ は 2 階の微分を伴っている．

運動方程式における場の混合は，もちろんラグランジアンにおける混合としても表現できる．実際，(2.11) 式の右辺第 1 項に直接 (2.31) 式と (2.41) 式を代入し，$h_{\mu\nu}$ および σ それぞれについて 1 次の項を取り出すと，

$$L_{h\sigma} = \zeta\sigma\left(\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} - \Box h\right) \tag{2.127}$$

となる．ここで (2.34) 式および (2.124) 式を使った．これを $h_{\mu\nu}$ について変分することにより，(2.46) 式の最後の項が得られることも確かめられよう．ま

た σ について変分すれば，(2.20) 式の第 1 項を $h_{\mu\nu}$ について展開したものも得られる．

このような混合項は，図 2.1 の (a) のようなダイアグラムに対応する．これを通じて (b) のようなダイアグラムが生じ，これによって，もともとはテンソル場にしか結合していなかった物質が，スカラー場に結合するようになる．これが，これまで計算してきたことの意味であるといってよい．

図 2.1(b) のダイアグラムを計算すると，テンソル場のプロパゲーターから，$k=0$ における発散が生ずるが，(2.127) 式の微分のために分子に k^2 が現れ，それが分母の k^2 を消してしまう．こうしてこのダイアグラムは，$k=0$ で有限の寄与を与える．

このように微分の存在は重要であるが，これは混合が運動エネルギーの項で起こっていることに相当する．こういう状況は簡単な質点系の力学でもみることができる．厳密ではないが，問題の要点は，次のようなラグランジアンに表されている．

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 + k\dot{q}_1\dot{q}_2 + q_1 J_1 \tag{2.128}$$

ここで，q_i $(i=1,2)$ は 2 つの質点の (一般化された) 座標で，第 3 項が運動エネルギーにおける混合を与え，その係数を k としている．最後の項は一方の質点に加わる外力の効果を表す．他方の質点には直接の外力は働かないとし，B–D 理論におけるスカラー場に相当すると考える．

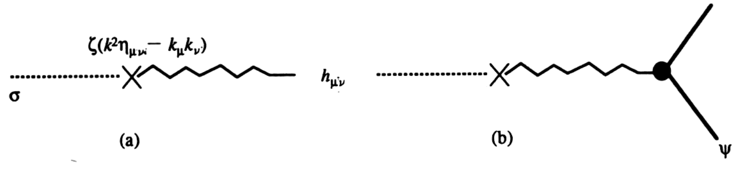


図 2.1　σ と $h_{\mu\nu}$ の混合結合 (×)．(b) の右端の・は $T_{\mu\nu}$ による物質場 (ψ) との結合を表す．

(2.128) 式を変分して，次の 2 つの運動方程式を得る．

$$\ddot{q}_1 + k\ddot{q}_2 = J_1 \tag{2.129}$$

$$\ddot{q}_2 + k\ddot{q}_1 = 0 \tag{2.130}$$

第 2 式は，

$$\ddot{q}_2 = -k\ddot{q}_1 \tag{2.131}$$

と表され，これを第 1 式に代入すると，

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{1-k^2}J_1 \tag{2.132}$$

という混合のない方程式が得られる．またこれを (2.131) 式に代入すると，

$$\ddot{q}_2 = -\frac{k}{1-k^2}J_1 \tag{2.133}$$

となり，q_2 にもけっきょく，外力が働くことになる．

(2.131) 式が (2.20) 式に対応し，(2.133) 式は (2.27) 式に対応するなど容易に推察できるであろう．しかし (2.132) 式は，このままでは (2.51) 式に対応していない．ここでは，$h_{\mu\nu}$ と σ，いい換えると q_1 と q_2 の混合としての新しい場 $\chi_{\mu\nu}$ の存在を示している．

そもそもこの問題は，ポテンシャル項がないために，このようにきわめて簡単に解けてしまう．しかし場の理論では，場の「規格化」が重要であり，それをみるにはやはりラグランジアンにおいて対角化を実行する必要がある．その答を言ってしまえば，対角化された座標として $\tilde{q}_i$ $(i=1,2)$ を次のように導入すればよいことになる．

$$q_1 = \tilde{q}_1 - \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}\tilde{q}_2 \tag{2.134}$$

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\tilde{q}_2 \tag{2.135}$$

ただし $k^2 < 1$ とする．実際 (2.134) 式と (2.135) 式を (2.128) 式に代入すると，

$$L = \frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}_2^2 + \left(\tilde{q}_1 - \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}\tilde{q}_2\right)J \tag{2.136}$$

という，混合のない形になっている．この (2.134) 式が (2.49) 式に相当する式である．

このような議論から，B–D 理論におけるスカラー場の特異な性質が明らかになったのではないだろうか．

3章　共形変換

いったん非最小結合を導入すると，**共形変換**に関する問題がつきまとう．共形変換を行うと，非最小結合を別の形にしてしまったり，あるいは全くなくしてしまうことさえできる．これは，もともと Einstein の理論が共形変換に対して不変ではないことからきている．この意味で，この変換はゲージ変換などとは違った様相を示すのだが，文献にはいろいろ混乱もみられる．そのあたりをできるだけ整理して説明したい．

共形変換にはいろいろな面があるが，テンソル重力場とスカラー場の混合結合を取り除くという使い方もある．また，共形変換を行うことにより，1つの**共形系**から別の共形系に移ることになるのだが，我々はどの共形系にいるのか，またそれはどのような物理的理由で決まるのか，という疑問に答えなければならない．それについての具体的な議論は，5章の宇宙論的応用で初めて出会うことになる．

無限に存在する共形系の中で，最も頻繁に議論されるのは J 系と E 系である．一般的には，2つの系では物理的な現象も違ってみえるのだが，重力的相互作用があまり強くない極限では，同じ結論となることも重要な点である．

3.1 共形変換とは何か

2章では，弱い場の近似を行い，スカラー場の寄与がニュートンの万有引力と同じ形の力を生み出すことを示した．その際，出発点のラグランジアンでは物質に結合していなかったスカラー場が，どのようにして最終的には物質に結合するかについて詳しくみた．結論として，それはスカラー場とテンソル重力場との混合結合のためであることを示した．その議論は弱い場の極限で行われたが，そういう制限をはずして完全に一般的な場合についても同じ結論を得る方法がある．それがこの章でとりあげる共形変換である．このことははじめ W. Pauli によって指摘され，後に Dicke もその物理的意味を論じている．数学的にはあいまいさがない，明確な，きわめて有用な方法であるにもかかわらず，物理的な解釈については，さらに掘り下げた議論が必要である．

共形変換とは，計量 $g_{\mu\nu}$ を，次式で与えられる新しい計量 $g_{*\mu\nu}$ に変える変換である．

$$g_{*\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu} \tag{3.1}$$

ここで，$\Omega(x)$ は時空座標 x の任意の関数である．同じことだが，これは線素 $\mathrm{d}s^2$ を，

$$\mathrm{d}s_*^2 = \Omega^2(x) \mathrm{d}s^2 \tag{3.2}$$

で与えられる新しい線素 $\mathrm{d}s_*^2$ に変える変換である．変換の関数を単に $\Omega(x)$ と書いてもよいが，この変換によって線素の符号は変えないとしたいので，あえて $\Omega^2(x)$ と書くことにする．

これは一般座標変換とは全く別種の変換である．一般座標変換は線素を不変に保つ変換である．一方，線素とは，最も基本的な意味で距離を定義するものである．したがって，変換 (3.2) 式は距離，または大きさの基準を，時空点ごとに違った割合で変化させることを意味する．しかも特別の方向といったものを何も示していない．すなわち，大きさを「等方的に」変えるだけである．つまり，たとえば x 方向にも y 方向にも同じように伸ばしたり縮めた

りする．したがって，2 つのベクトルがあった場合，それらの間の角度は不変に保つ．これが「共形」(conformal) の意味である．

実際には 4 次元時空での等方性なので，普通の意味の長さを変えたら，同じ割合で時間間隔も変えることになっていることにも注意しよう．

もし Ω が x に依存しない定数であるならば，これは**スケール変換** (scale transformation) とよばれる*．すなわち，長さを測る物差しを全時空にわたっていっせいに何倍かにする，という変換である．特殊相対論は常に成り立っていると考えるならば，これは時間をはかる時計についても，その単位をいっせいに何倍かにすることを意味する．もしこの世の中に特定の基準となるものさしがないとしたら，物理現象も，またそれを支配する法則も，このようなスケール変換を行っても全く同じようにみえるだろう．そういうことがあるとしたら，世界は**スケール不変**である，という．しかし，実際にはこの不変性は成り立っていない．たとえば現在，最も正確な時計は原子時計であるが，これは基本的にはリュードベリ (Rydberg) 定数

$$Ry = \pi \frac{m_{\mathrm{r}} c Z^2 \alpha^2}{\hbar} \tag{3.3}$$

あるいはこれに微細構造定数 (fine-structure constant)

$$\alpha \equiv \mathrm{e}^2/4\pi\hbar c \approx 1/137 \tag{3.4}$$

の何乗かを掛けたものを基本振動数とする装置である．ここで m_{r} は「換算質量] で，電子の質量 m_{e} と原子核の質量 M によって，

$$m_{\mathrm{r}}^{-1} = m_{\mathrm{e}}^{-1} + M^{-1} \tag{3.5}$$

によって定義される．また (3.3) 式において Z は原子番号である．つまるところ，それは素粒子の質量が基本的な定数であるという考えにたっている．素粒子の質量はその粒子に固有のもので，違ったものさしや時計ではかれば違った値になる．すなわち，素粒子の質量はスケール不変ではない．

しかし，だからといってスケール不変性という考えは無意味かというと，必

*スケール変換といっても，$g_{\mu\nu}$ は不変にしておき，その代わり座標の変換として $x^\mu = \Omega^{-1} x_*^\mu$ を考える場合もある．ミンコフスキー時空に限るならば有用なこともあるが，ここで考えたものと完全に同じではない．

ずしもそうはいえない．素粒子の質量に相当するエネルギーよりもはるかに高いエネルギーの現象をみている場合，質量はほとんどゼロとみなしてよい．そういう状況では，スケール不変性は近似的によく成り立っており，したがって便利な概念となる．

そういう実用的な観点とは別に，スケール不変性にはもっと基本的な意味があるという見方もある．それは，素粒子の質量の真の起源とは何かという疑問に関係している．そういう議論をする際，c とか $\hbar$ は真に基本的で普遍的な定数と考える．これは議論をあまり複雑にしないため，といってよいだろうが，これを認めれば，c や $\hbar$ を 1 としてしまう単位系をとって考えるのが特に便利である．そうすると，長さ，時間，質量という 3 つの次元は 2 つに減ってしまう．ただ 1 つ残った次元を何にとるかは自由だが，たとえば質量がそれだと考えてみよう．そうすればその質量の逆数が，長さや時間の単位を与えることがはっきりする．素粒子の質量さえなければスケール不変性が成り立つのだから，逆にいえば，素粒子の質量とスケール不変性の破れとは同じ起源をもつと考えてよいだろう．

現在の素粒子論では，初めは質量のない世界から出発し，たぶん何かの対称性の**自発的な破れ** (spontaneous breaking) の結果，質量が生じたと考えている．それと同じ意味で，初めは，そしてそれはおそらく宇宙の初めを意味するだろうが，スケール不変性が成り立っている世界から出発したかもしれない．こんな意味で，スケール不変性には何か基本的な重要性があるに違いないという，漠然とした考えも，あながち荒唐無稽とはいえない面がある．

さて，この意味のスケール変換は，座標によらない**大域的な**変換である．しかし，すべての基本的な変換は，**局所的な**ものであるべきだ，という考えがある．これは一般相対論やゲージ理論の成功以来，ますます強固となりつつある．そういう意味でスケール変換を局所化したものが，まさに共形変換である．すなわち共形変換は，**局所的なスケール変換**といってよい．

そもそもゲージ理論は，1921 年の Weyl の理論にその原型を見いだすが，彼の理論は電磁場その他，現在の意味でのゲージ理論ではなかった．実は，上

に述べた共形変換であり，その意味で共形変換 (3.1) 式は，**ワイルのスケール変換** (Weyl rescaling) とよばれることも多い．ゲージ (gauge) の名も，共形変換 (3.1) 式が大きさの基準に関するものであることに由来する．一般座標変換は局所的な変換であり，一般相対論を拡張しようとした Weyl は，一般座標変換以外の局所的な変換を探して，この共形変換に到達したのであった．

前に，素粒子の質量が無視できるくらいの高いエネルギーの現象では，近似的にスケール不変な理論を考えればよいことを述べた．では，質量を無視した場合，これを局所化した共形不変性が成り立っているだろうか．答は，ほとんどの場合についてイエスである．質量がゼロのフェルミオンやベクトル場の理論 (マクスウェル理論) は共形不変であるが，スカラー場は完全な不変性をもたないし，またフェルミオンの理論も，重力場についてある種の条件が満たされる場合に限られる*．さらにマクスウェル理論での共形不変性が保たれるのは，時空が 4 次元の場合のみである．

さらに，質量がゼロの場のもう 1 つの例として一般相対論をあげなければならないが，これについては共形不変性はない．その理由は明らかで，重力定数として G_0 を含み，これは (質量)$^{-2}$ の次元をもつからである．場が弱い極限としての重力子は確かに質量をもたないが，理論にはもう 1 つの定数 $M_{\rm P}$ があって，長さの基準を定めており，そのために大域的なスケール不変性すらもっていない．

このことは，アインシュタイン理論を量子化した場合，くりこみ処方が使えないという事情と無関係ではない．そのため，重力のさらに根元的な理論は，こういう次元をもつ定数を含まず，したがって，おそらく共形不変な理論ではないか，という予想も行われている．それが正しいならば，アインシュタイン理論のように 2 階の微分方程式を満たす理論ではなく，4 階の微分方程式に従う理論となるだろう．しかし，現実の物理的現象と比べられるのは，おそらくそういう高い対称性が自発的に壊れ，けっきょくは $8\pi G_0 = M_{\rm P}^{-2}$ が現れた理論とならざるをえない．そういうタイプの現実的な重力理論として

*付録 E を参照のこと．

は，共形不変性はもはや成り立っていないはずである．

それでは，現実には共形不変性は無意味かというと，これがまたそうともいえない．それが有用な道具となる例の1つが，非最小結合をもつ理論であり，これから具体的な説明にはいる．ただその前に，共形変換に対するいくつかの量の変換則を調べておこう．

計量 $g_{\mu\nu}$ で書かれている式があったとする．それを $g_{*\mu\nu}$ によって書き直す．これによって新しい共形系に移るということにする．ちょうど座標変換によって新しい座標系 (coordinate frame) に移るのと同じ感じである．意味としては，時空点ごとに異なったものさしを使うことにする，ということであるが，その結果について正確なイメージをはじめからつかむことはむずかしい．新しい共形系で表していることを示すために，$*$ をつける．

この書き直しを実行するためには，(3.1) 式を逆に書いて，

$$g_{\mu\nu} = \Omega^{-2}(x) g_{*\mu\nu} \tag{3.6}$$

とし，これをもとの共形系における式に代入すればよい．簡単にわかることとして，

$$g^{\mu\nu} = \Omega^2 g_*^{\mu\nu} \tag{3.7}$$

$$\sqrt{-g} = \Omega^{-4}\sqrt{-g_*} \tag{3.8}$$

が得られる．

さらにクリストッフェル (Christoffel) 記号

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho}\left(\partial_\nu g_{\rho\lambda} + \partial_\lambda g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\nu\lambda}\right) \tag{3.9}$$

に代入すると，

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \Gamma^\mu_{*\nu\lambda} - \left(f_\nu \delta^\mu_\lambda + f_\lambda \delta^\mu_\nu - f_*^\mu g_{*\nu\lambda}\right) \tag{3.10}$$

が得られる．ここで，$\Gamma^\mu_{*\nu\lambda}$ は (3.9) 式ですべての $g_{\alpha\beta}$ を $g_{*\alpha\beta}$ で置き換えたものを意味する．すなわち，新しい共形系におけるクリストッフェル記号のことである．また，

$$f_\nu \equiv \frac{\partial_\nu \Omega}{\Omega} = \partial_\nu \ln \Omega \tag{3.11}$$

$$f_*^\mu \equiv g_*^{\mu\nu} f_\nu \tag{3.12}$$

という記号を用いた．(3.12) 式では，新しい共形系における $g_*^{\mu\rho}$ を用いて添え字を上げていることに注意．(3.10) 式の詳しい導き方については付録 D を見てほしい．しかし最も基本的なのは，たとえば，

$$\begin{aligned}\partial_\mu g_{\nu\lambda} &= \partial_\mu \left(\Omega^{-2} g_{*\nu\lambda}\right)\\ &= \Omega^{-2}\partial_\mu g_{*\nu\lambda} - 2\Omega^{-3}\partial_\mu \Omega g_{*\nu\lambda}\\ &= \Omega^{-2}\left(\partial_\mu g_{*\nu\lambda} - 2 f_\mu g_{*\nu\lambda}\right)\end{aligned} \tag{3.13}$$

というような計算である．全体として Ω^{-2} が出ているが，$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ を計算するにはこれに $g^{\mu\rho}$ を掛けるので，(3.7) 式により Ω^2 がかかり，最終結果 (3.10) 式では，$\Gamma^\mu_{*\nu}$ に Ω がかかっていない．

$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ が計算できたら次に $R^\mu_{\nu,\rho\sigma}$ を計算し，最終的に R の変換則を求める．これも詳細は付録 D に譲るが，結果は，

$$R = \Omega^2\left(R_* + 6\Box_* f - 6 g_*^{\mu\nu} f_\mu f_\nu\right) \tag{3.14}$$

となる．また，

$$\Box_* f = \frac{1}{\sqrt{-g_*}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g_*} g_*^{\mu\nu}\partial_\nu\right) f \tag{3.15}$$

は，新しい共形系におけるダランベルシャンである．

3.2 非最小結合

再び出発点のラグランジアン (2.11) 式に戻ろう．この節でも何度も出てくるので，再現しておく．

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}F(\phi)R - \frac{1}{2}\epsilon g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + L_{\rm m}\right) \tag{3.16}$$

ただし，

$$F(\phi) = \xi\phi^2 \tag{3.17}$$

と書き，あとで一般化できるようにしておいた．

まずこの第1項

$$\mathcal{L}_1 = \sqrt{-g}\frac{1}{2}F(\phi)R \tag{3.18}$$

に注目する．共形変換を行い (3.8) 式および (3.14) 式を使うと，(3.18) 式は，

$$\mathcal{L}_1 = \sqrt{-g_*}\frac{1}{2}F(\phi)\Omega^{-2}\left(R_* + 6\Box_* f - 6g_*^{\mu\nu}f_\mu f_\nu\right) \tag{3.19}$$

となる．Ω^{-2} が現れていることに注目しよう．これはまだ決まっていない任意の関数であるから，

$$F(\phi)\Omega^{-2} = 1 \tag{3.20}$$

となるように選べば，(3.19) 式の第1項，R_* を含む項は，ちょうどアインシュタイン・ヒルベルト項となる．そのように Ω を決める．

$$\Omega = F^{1/2} \tag{3.21}$$

そうすると (3.19) 式の第2項は，部分積分によってなくなってしまう．それは (3.15) 式からわかるだろう．そこで次の第3項に進もう．(3.11)，(3.21) 式により，

$$f_\mu = \frac{1}{2}\frac{\partial_\mu F}{F} = \frac{1}{2}\frac{F'}{F}\partial_\mu\phi \tag{3.22}$$

と書くことができる．ただし，

$$F' = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\phi}$$

である．

以上により (3.18) 式は，

$$\mathcal{L}_1 = \sqrt{-g_*}\left(\frac{1}{2}R_* - \frac{1}{2}\frac{3}{2}\left(\frac{F'}{F}\right)^2 g_*^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right) \tag{3.23}$$

と書き換えられた．すでに述べたとおり，第1項はアインシュタイン・ヒルベルト項の形になっていて，非最小結合はもはや存在しない．また第2項は ϕ の運動エネルギー項に似た形をしている．

(3.16) 式の第2項は，同様の手段で，

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\epsilon g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi = -\frac{1}{2}\sqrt{-g_*}\epsilon\Omega^{-2}g_*^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$$
$$= -\frac{1}{2}\sqrt{-g_*}\epsilon\frac{1}{F}g_*^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \qquad (3.24)$$

となる．これは (3.23) 式の第 2 項と全く同じ形をしている．それらを集めると，

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-g_*}Dg_*^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \qquad (3.25)$$

となる．ここで，

$$D = \frac{3}{2}\left(\frac{F'}{F}\right)^2 + \epsilon\frac{1}{F} \qquad (3.26)$$

とおいた．もし，

$$D > 0 \qquad (3.27)$$

ならば，

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\phi} = \sqrt{D} \qquad (3.28)$$

を満たすような関数 $\sigma(x)$ を導入する．そうすると，

$$\sqrt{D}\partial_\mu\phi = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\phi}\partial_\mu\phi = \partial_\mu\sigma$$

だから，(3.25) 式は，

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-g_*}g_*^{\mu\nu}\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma \qquad (3.29)$$

と書くことができる．これは σ という新しいスカラー場の**正準形**の運動エネルギー項である．すなわち，新しい共形系では，もとの ϕ ではなく，それから導かれる σ が普通の意味のスカラー場としてふるまうのである．

もし $D < 0$ であると，(3.29) 式の前の符号がプラスとなる．これは σ がゴーストであることを意味する．逆にいえば，σ が正常な，正のエネルギーをもつ場であるためには (3.27) 式が満たされていなければならない．

σ と ϕ の関係は (3.28) 式を積分することによって得られる．今の場合の具体的な形 (3.17) 式に限れば，

$$D = \left(6 + \epsilon\xi^{-1}\right)\phi^{-2} = \zeta^{-2}\phi^{-2} \qquad (3.30)$$

である．ここで，ζ は (2.28) 式によって定義されている．条件 $D > 0$ は，

$$\zeta^2 > 0 \tag{3.31}$$

となり，これは (2.62) 式と一致する．このことは，2 章で導入した σ と，この章の σ とは，けっきょく，同じものであることを示唆している．ただ前章の議論は場が弱い場合に限られていたが，今回はその制限にはとらわれないことを思い出しておこう．

さて (3.30) 式を (3.28) 式に代入すれば，

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\phi} = \zeta^{-1}\phi^{-1} \tag{3.32}$$

だから，これを積分して，

$$\zeta\sigma = \ln\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) \quad \text{あるいは} \quad \phi = \phi_0 \mathrm{e}^{\zeta\sigma} \tag{3.33}$$

を得る．ここで，ϕ_0 は積分定数だが，あとで決定する．

この σ を使って (3.16) 式はけっきょく，

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g_*}\left(\frac{1}{2}R_* - \frac{1}{2}g_*^{\mu\nu}\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma + L_{*\mathrm{m}}\right) \tag{3.34}$$

と書き換えられた．これが新しい共形系でのラグランジアンである．ここで，$L_{*\mathrm{m}}$ は物質のラグランジアンに共形変換を施したものであるが，その詳細については次節で議論する．その前にいくつかの注意をしておきたい．

まず，2 つの共形系，(3.20) 式で決まる共形変換の，前とあとの共形系に対して名前をつけておいたほうが便利であろう．ここでは，それぞれを J 系と E 系とよぶことにする．J は P. Jordan の名前からきている．そもそも非最小結合を最初に議論した Jordan に敬意を表したい．次に E は Einstein の E で，非最小結合のない「普通の」理論，すなわちアインシュタインの理論となる共形系だということを意味する．(3.16) 式は J 系で与えられたラグランジアンで，「同じ」理論を E 系でみると，そのラグランジアンは (3.34) 式だ，ということである．

今は (3.21) 式によって Ω を決定したが，そうでない $\Omega(x)$ を考えることは自由で，したがって共形系も無限にたくさん存在する．しかし，それらの中で J 系と E 系は明らかに特別の地位を占める．いずれにしても，非最小結合

の存在，非存在，あるいはその形は共形系の選び方に依存することがわかった．またE系では，アインシュタイン理論プラス「普通の」スカラー場 (σ) という平凡な理論となっているようにみえるが，$L_{*\mathrm{m}}$ の中にスカラー場がはいってきて，そこにもとの理論の特徴が反映されるようになっている．

E系では非最小結合がない以上，重力定数は全くの定数となるようにみえる．宇宙論的にいえば，重力定数の時間変化は全くないことになる．これは物理的な結論も，共形系の選び方に依存することを意味し，またそれならば，どの共形系を選ぶかについて明確な原理があるのか，という疑問を提起することになる．これらの諸問題について少しずつ議論を進めていくこととしたい．

なお $D>0$，すなわち σ がゴーストでない条件は $\epsilon=-1$，つまり ϕ が一見ゴーストであっても満たされうるのである．すなわち，

$$\xi > \frac{1}{6} \tag{3.35}$$

であればよい．どうしてこうなったかは，(3.25) 式あるいは (3.26) 式の内容をみればわかる．実際 (3.26) 式の第1項は非最小結合からきており，これは常に正，つまり，最終結果からいえばゴーストでない正常な場の符号をもっている．一方，第2項は本来の運動エネルギー項からの寄与であるが，それが逆の符号をもっていても，第1項が十分大きければ，全体としては正常な場の符号となる．前章の議論からすると，これが計量場のスピン0の部分との混合結合の結果出てくることは容易に想像できるが，なぜ正常な場の符号となるかは，この理論の特性で，けっして自明のことではない．

極端な場合として，ϵ をゼロとおいても $\zeta^2=1/6>0$ で，したがって σ は正のエネルギーをもつ．すなわち，J系では ϕ の運動エネルギー項がなくても，混合結合の結果，スカラー場は力学的な自由度をもつのである．実際，そのような模型が試みられたことがある．

しかし $\epsilon=-1$ の場合，J系で平坦な時空を考えると，ϕ は確かにマイナスのエネルギーを出してしまうではないか，という疑問が生ずるかもしれない．しかし非最小結合のために，ϕ と計量場のスピン0の成分とは混合結合をもっていることをもう一度思い出す必要がある．そのために ϕ が動けば計量

場はそれに連動して動き，したがって平坦であり続けることはできない．その結果，全体としては正のエネルギーをもつのである．もっとも，ϕ も一般相対論の意味では物質の一部にほかならず，時空へのはねかえりが必ず存在はするが，それは次の次数の効果となる．一方 E 系でみれば，σ は混合結合をもたないから事態はもっと簡単で，時空が平坦なままで運動することができ，そのエネルギーはプラスである．

(3.33) 式では積分定数として ϕ_0 を導入しておいたが，これは次のようにすれば決定できる．ϕ_0 は $\sigma = 0$ に対する ϕ の値である．また条件 (3.20) 式によって Ω を決めているが，$\sigma = 0$ ならば F は定数なのだから共形変換を行う必要はなく，このときには $\Omega = 1$ としてよい．したがって (3.20) 式は，

$$\xi\phi_0^2 = 1 \tag{3.36}$$

となる．すなわち，

$$\phi_0 = \xi^{-1/2} \tag{3.37}$$

である．こうして (3.33) 式は，

$$\phi = \xi^{-1/2}\mathrm{e}^{\zeta\sigma} \tag{3.38}$$

となるが，これを展開すると，

$$\phi = \xi^{-1/2} + \xi^{-1/2}\zeta\sigma + \cdots \tag{3.39}$$

を得る．ここに書いた項は，(2.31) 式で (2.35) 式と (2.124) 式を用いたものと完全に一致する．

以上の場合には (3.21) 式は，

$$\Omega = \mathrm{e}^{\zeta\sigma} \tag{3.40}$$

を意味するので，これを (3.1) 式に代入する．線形化の結果を，

$$g_{*\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{*\mu\nu} \tag{3.41}$$

の形に表すと，

$$h_{*\mu\nu} = h_{\mu\nu} + 2\eta_{\mu\nu}\zeta\sigma \tag{3.42}$$

を得る．これから，常套手段として，

$$\chi_{*\mu\nu} \equiv h_{*\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h_* \tag{3.43}$$

を計算すると，

$$\chi_{*\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h - 2\eta_{\mu\nu}\zeta\sigma \tag{3.44}$$

となり，(2.48) 式と一致する．

これらの考察から，この章で行った共形変換の方法は，2 章で試みた，線形化した理論における対角化の一般化であることが納得できただろう．物理的な応用の場合，最低近似で間に合うことが多い．その場合，どちらでやっても同じことにすぎないが，例外の 1 つとして，量子補正がある．この場合，物質との結合がハミルトニアンで書くことのできる E 系で計算が可能だという利点がある．また宇宙論的応用では，完全に高次の効果まではいった分析が必要で，この点では E 系が欠かせない．これらの点はあとで議論される．

最後に，この理論におけるもう 1 つの極端な場合，すなわち $\epsilon = -1$, $\xi = 1/6$ の場合を調べておこう．このとき，(3.30) 式から $D = 0$ となり，(3.25) 式からわかるように，E 系でのスカラー場の運動エネルギー項がなくなってしまう．すなわち，

$$\sqrt{-g}\left(\frac{1}{6}\phi^2 R + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right) = \sqrt{-g_*}\frac{1}{2}R_* \tag{3.45}$$

となって，スカラー場の力学的自由度は，そもそも存在しない．しかしながら，この特別な場合には，理論に少し違った意味づけを行うことができる．それについては，付録 E で簡単な説明を試みた．

3.3 物質結合

2 章ではスカラー場の物質結合を表す場の方程式として (2.27) 式を導いた．

$$\Box\varphi = \zeta^2 T \tag{3.46}$$

これを E 系の方程式に書き直そう．

まず左辺は，

$$\Box\varphi = \frac{1}{2}\xi\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi^2\right) \tag{3.47}$$

と書くことができるが，ここで，

$$\left.\begin{aligned}\phi^2 &= \xi^{-1}\mathrm{e}^{2\zeta\sigma}\\ \sqrt{-g} &= \sqrt{-g_*}\mathrm{e}^{-4\zeta\sigma}\\ g^{\mu\nu} &= g_*^{\mu\nu}\mathrm{e}^{2\zeta\sigma}\end{aligned}\right\} \tag{3.48}$$

を使う．そうすると，

$$\Box\varphi = \zeta\mathrm{e}^{4\zeta\sigma}\Box_*\sigma \tag{3.49}$$

となることがわかる．

次に (3.46) 式の右辺では (2.16) 式により，

$$T_{\mu\nu} = -2\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathcal{L}_{\mathrm{m}}}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{3.50}$$

だが ($\mathcal{L}_{\mathrm{m}} \equiv \sqrt{-g}L_{\mathrm{m}}$)，ここで，

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{\mathrm{m}}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\partial g_*^{\rho\sigma}}{\partial g^{\mu\nu}}\frac{\delta\mathcal{L}_{\mathrm{m}}}{\delta g_*^{\rho\sigma}} = \Omega^{-2}\frac{\delta\mathcal{L}_{\mathrm{m}}}{\delta g_*^{\mu\nu}} \tag{3.51}$$

とする．ただ厳密にいえば，この連鎖則が成り立つのは $\mathcal{L}_{\mathrm{m}}$ が $g^{\mu\nu}$ の微分を含まず，したがって $g^{\mu\nu}$ についての汎関数微分が単なる微分となる場合に限られる．しかし，最終的には $T_{\mu\nu}$ 全体ではなく，その一部である T しか問題にならないので，その場合には上の限定が障害とはならない．その意味で，

$$T_{\mu\nu} = \Omega^2 T_{*\mu\nu} \tag{3.52}$$

が得られる．ここで $T_{*\mu\nu}$ は，もちろん (3.50) 式のいたるところに $*$ をつけて定義される．ただし，$\mathcal{L}_{*\mathrm{m}}$ は $*$ をつけないものと全く同じだが，$*$ をつけた量で書き直したものという意味である．

こうして，

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \Omega^4 T_* \tag{3.53}$$

となる．これを (3.48) 式とともに (3.46) 式に代入すると，

$$\Box_*\sigma = \zeta T_* \tag{3.54}$$

を得る．すなわち σ は，やはり物質のエネルギー・運動量テンソルの対角和を源とすることになるが，E 系では σ はもはや計量場と混合はしない．したがって (3.54) 式は，σ が物質のラグランジアンに直接結合の項をもっている

ことを意味する．それが実際どのようになっているかを，次の2つの節で調べてみよう．

その前に注意を1つ．これまでJ系からE系への共形変換を考えてきたが，逆の共形変換も考えられる．つまり (3.33) 式によって ϕ を導入し，

$$\xi^{-1} = \epsilon\left(\zeta^{-2} - 6\right) \tag{3.55}$$

で与えられる ξ を使ってもともとのラグランジアン (2.11) 式を再現することができる．ところで，(3.34) 式で $L_{*\mathrm{m}}$ 以外の部分には ζ は全く含まれていない．したがって，こうして決まる ξ はどんなものでもよい．要するに，ある ξ から出発していったんE系に移り，その後J系に戻る場合，前とは違った ξ の値になっていてもよいことになる．もちろん，ϕ も前とは違ったものになっている．このことから，ξ の絶対的な値には意味がないといえるだろうか．

答はノーである．$L_{*\mathrm{m}}$ の中には ζ が含まれている．そのことは (3.54) 式からも推察できるが，実際，次節の (3.64) 式などに具体例がみられる．そもそも ζ，あるいは ξ は物質結合の強さによって決まるもので，スカラー場を含めた重力的な部分だけをみていても意味はないことに注意しておこう．

3.4 フェルミオン

(3.16) 式における物質のラグランジアン L_{m} に対しても，共形変換を行わなければならない．2章と同じく，物質場としては質量のある自由フェルミオンを考えよう．すなわち，(2.107) 式を再現して，

$$L_{\mathrm{m}} = -\overline{\psi}\left(b^{\mu i}\gamma_i\partial_\mu + m\right)\psi \tag{3.56}$$

を考える．

(3.1) 式を (2.101) 式と比べると，四脚場に対する共形変換は，

$$b^i_{*\mu} = \Omega b^i_\mu \tag{3.57}$$

とすればよいことがわかる．これから (3.56) 式の第1項では，

$$b^{\mu i} = \Omega b^{\mu i}_* \tag{3.58}$$

を代入すると,

$$\sqrt{-g}b^{\mu i} = \Omega^{-3}\sqrt{-g_*}b_*^{\mu i} \tag{3.59}$$

となる. ψ に関する運動エネルギー項の前にかかる Ω^{-3} を取り除くために,

$$\Omega^{-3/2}\psi = \psi_*, \quad \Omega^{-3/2}\overline{\psi} = \overline{\psi}_* \tag{3.60}$$

によって, 変換された ψ_* および $\overline{\psi}_*$ を導入する. そうすると (3.56) 式の第 1 項は,

$$-\sqrt{-g_*}\,\overline{\psi}_* \not{D}_* \psi_* \tag{3.61}$$

となる. ただ詳しくいうと, 正確にこうなるのはトーションがない場合だが, その詳細については付録 F を参照してほしい. その条件の下で (3.61) 式は, 変換前と全く同じ形をしている. すべての場所に $*$ がついているだけである. このような場合, フェルミオンの運動エネルギー項は, 共形不変であるという.

ところが質量項はそうならない. 実際 (3.57), (3.60) 式によると,

$$\sqrt{-g}\,\overline{\psi}\psi = \Omega^{-1}\sqrt{-g_*}\,\overline{\psi}_*\psi_* \tag{3.62}$$

となり, Ω^{-1} が残ってしまう. これは, 運動エネルギー項にあった $b^{\mu i}$ が, ここにはないためである. この意味で, 質量項は共形不変ではない. まとめると,

$$L_{*\mathrm{m}} = -\overline{\psi}_*\left(\not{D}_* + m\Omega^{-1}\right)\psi_* \tag{3.63}$$

となる. ここで (3.40) 式を代入すると, けっきょく,

$$L_{*\mathrm{m}} = -\overline{\psi}_*\left(\not{D}_* + m\mathrm{e}^{-\zeta\sigma}\right)\psi_* \tag{3.64}$$

が得られた.

変換前と形として変わったのは, 質量項に現れた $\mathrm{e}^{-\zeta\sigma}$ である. これを通じて σ は ψ に, ラグランジアンの中で直接の結合をもつ. $\mathrm{e}^{-\zeta\sigma}$ を展開した最初の項は普通の質量項だが, 次の σ について線形の項を取り出すと,

$$L_{\psi\sigma} = m\overline{\psi}_*\psi_*\zeta\sigma \tag{3.65}$$

という湯川相互作用の形になる. これは (2.122) 式と同じ形になる.

(3.64) 式には σ の高次の項が無限に含まれるが, それらはすべて $\sqrt{G_0}$ に

ついても高次となることを注意しておこう．そのことは (2.29) 式をみれば明らかだろう．

これは，全く「普通の」相互作用だから，フェルミオン 2 個の間で 1 個のスカラー粒子 σ が交換された場合のポテンシャルは簡単に求められ，

$$V_\sigma = -m_1 m_2 \zeta^2 \frac{1}{4\pi r} \tag{3.66}$$

となり，(2.59) 式を再現する．

ただ，出発点とした J 系では，スカラー場が物質に直接結合しないことが WEP を保証していたが，そのことは E 系ではどうなっているのだろうか．この結合のために共変的な保存則 $\nabla_\mu T^{\mu\nu}$ は壊れ，したがって，粒子の運動方程式，すなわち，質量×測地線の方程式の右辺はゼロでなくなる．しかしその右辺は，(3.65) 式からわかるように，質量に厳密に比例する．すなわち比例係数は ζ で，これは物質粒子の個性にはよらない．両辺を質量で割れば，運動方程式はけっきょく，質量を全く含まない式となり，WEP は依然として成り立つようになっている．

同じ結論は，J 系における測地線の方程式を直接変換しても確かめられる．実際 (3.10) 式を用いて，J 系における測地線の方程式

$$\frac{Du^\mu}{D\tau} \equiv \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} u^\nu u^\lambda = 0 \tag{3.67}$$

を書き直してみよう．

(3.2) 式より，

$$\frac{\mathrm{d}\tau_*}{\mathrm{d}\tau} = \Omega \tag{3.68}$$

によって，まず，

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \Omega u_*^\mu \tag{3.69}$$

これより，

$$\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\tau_*}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau_*}\left(\Omega u_*^\mu\right) = \Omega^2 \left(\frac{\mathrm{d}u_*^\mu}{\mathrm{d}\tau_*} + f_\nu u_*^\nu u_*^\mu \right) \tag{3.70}$$

を得る．ここで，

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\tau_*} = \frac{\partial \Omega}{\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau_*}$$

を使った.

(3.10) 式を代入すると,

$$\frac{Du^\mu}{D\tau} = \Omega^2\left[\frac{Du_*^\mu}{D\tau_*} - \left(f_\nu u_*^\nu\right)u_*^\mu + f_*^\mu\left(u_{*\nu}u_*^\nu\right)\right] \tag{3.71}$$

を得る. したがって (3.67) 式は,

$$\frac{Du_*^\mu}{D\tau_*} = \left(f_\nu u_*^\nu\right)u_*^\mu - f_*^\mu\left(u_{*\nu}u_*^\nu\right) \tag{3.72}$$

となる. ここで (3.40) 式を使えば,

$$\frac{Du_*^\mu}{D\tau_*} = \zeta\left[\left(u_*^\lambda \partial_\lambda \sigma\right)u_*^\mu - g_*^{\mu\lambda}\partial_\lambda\sigma\left(u_{*\nu}u_*^\nu\right)\right] \tag{3.73}$$

となる. 右辺はゼロではないが, すべての粒子に共通な場 σ だけを含み, 粒子に固有な質量などには全く依存しない. WEP の成立にとって, 普通の意味の測地線方程式は十分条件だが, 必要条件ではない.

つまるところ, ある 1 つの共形系で, 同じ初期条件で異なる物体が同じ運動をすることが確かめられたら, 別の共形系でもそうなる, ということである.

(3.64) 式からは, E 系でのディラック方程式として

$$\left(\not{D}_* + m\mathrm{e}^{-\zeta\sigma}\right)\psi_* = 0 \tag{3.74}$$

が導かれる. 一方, この場のエネルギー・運動量テンソルは運動エネルギー項の形で決まるので, J 系での形と同じである (いたるところに $*$ をつけて). それから対角和を求めるときには運動方程式を使うので,

$$\begin{aligned} T_* &= \overline{\psi}_*\not{D}_*\psi_* \\ &= -m\mathrm{e}^{-\zeta\sigma}\overline{\psi}_*\psi_* \end{aligned} \tag{3.75}$$

となる.

また (3.64) 式は, σ の源も生じさせ, σ の場の方程式は,

$$\Box_* \sigma = -\zeta \mathrm{e}^{-\zeta\sigma} \overline{\psi}_* \psi_* = \zeta T_* \tag{3.76}$$

となり，これも対応する (2.126) 式と同じ形となる．もちろん (3.54) 式とも一致する．

4章　ディラトン理論

重力的スカラー場として考えられるのは，B–D 理論だけではない．ほかにもいろいろな理論的模型を考えることはできるが，特にスケール変換に関係した理論を議論してみたい．やはり非最小結合の特色を利用したもので，共形変換がスケール不変性の**自発的**な破れを実現する手段を提供してくれること，また場の量子論における**異常項** (anomaly) が，この不変性をさらに**実質的** (explicit)* に壊す働きをするなど，理論的にも興味深い点がある．その結果，**有限到達距離重力** (finite-range gravity) を予言することになる．これについては，**第 5 の力**として活発な実験的研究が行われた．最初の単純な予言はすでに否定されているが，1 つの視点が開かれたわけで，さらに高精度の実験が行われており，簡単な紹介を試みる．

4.1　スケール不変性

前章では共形変換を議論したが，非最小結合をもつ理論には，もう 1 つ**スケール不変性**という面があり，これも追究に値する魅力的な特徴である．ここで**スケール変換**というのは，前章の Ω が，今度は時空座標に依存しない**大域**

*explicit は普通「明白」,「あからさま」などと訳されるが，「自発的」(spontaneous) に対置される，ぴったりの日本語にはならない．ここでは，名案とはいえないが，意味の上で近くなるように「実質的」を採用することにした．

的変換である場合の変換のことを指す．以前にも議論したが，普通のアインシュタイン・ヒルベルト項には次元をもつ量 M_{P}^2 がかかっており，これがスケール不変性を破っていた．また物質場のほうでも，質量項がやはりスケール不変ではない．しかし，この対称性の破れを**自発的**なものと考えることができ，統一理論における質量の起源について新しい見方を提供することができる．

具体的な模型を考える際，物質場としては ψ ではなく，スカラー場 Φ を考えることにする．あとで場の量子論を適用する際に，計算が簡単になることがおもな理由である．もちろん最終的にはフェルミオン場も考察する．同じスカラー場といっても Φ は，ϕ のような「重力的場」ではなく，それ自身の間，あるいは ψ などと「強い」相互作用をもつものとする．いわゆる「弱い相互作用」でもよいが，要するに重力相互作用よりははるかに強い結合をもつと考える．電弱統一理論や大統一理論で考えられるヒグス (Higgs) 場をイメージすればよい．

そこで出発点となるのは次のラグランジアンである．

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\xi\phi^2 R - \frac{1}{2}\epsilon g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + L_{\mathrm{m}}\right) \tag{4.1}$$

実はこれは 2 章の (2.11) 式と同じ形だが，物質場のラグランジアン L_{m} として (2.99) 式の代わりに，

$$L_{\mathrm{m}} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi - \frac{f}{4}\phi^2\Phi^2 - \frac{\lambda_\Phi}{4!}\Phi^4 \tag{4.2}$$

と選ぶ点が異なっている．この最後の項は Φ の自己相互作用だが，その結合定数 λ_Φ は，「強い」相互作用を表すので，大体のところ 1 のオーダーとみなす．また第 2 項は，ϕ が物質との相互作用をラグランジアンの段階でもつことを表しており，B–D 理論の基本的約束を破っている．したがって WEP を破ることになり，これが**第 5 の力**として議論の対象となった．Dicke が実験的に当然と考えたことに対する挑戦ともいえよう．またこの段階では，Φ は質量ゼロと仮定されている．すなわち $(\mu_\Phi^2/2)\Phi^2$ のような項は入れていない．この点も B–D 理論との大きな違いである．

さらにいえば，スカラー場については運動エネルギー項以外は全体として4乗の項ばかりで，したがって，それぞれにかかる係数はすべて無次元であることに注意しよう．実はそうなるように，というのが，この際の指導原理であった．普通の意味で，ボゾン場は，質量の次元をもつ．それは，運動エネルギー項の形から決まったことであった．このことから，非最小結合項の係数 ξ もまた無次元であり，けっきょくこの理論には，次元をもつ定数は1つも含まれておらず，したがってスケール不変性が成り立つのである．これは，最も簡単な形の非最小結合の理論の特徴であり，それをもっと追求しようというのが，この試みの目的である．

スケール不変性だけからいえば，$\phi^4, \phi^3\Phi, \phi\Phi^3$ などの項もあってよい．しかし今はそれはしない．最も特徴的な役割を果たす項のみを加えたのだが，ϕ^4 の項以外は，強い相互作用の対称性によって正当化することは可能である．

運動方程式を導こう．(2.13) 式は，形としてはそのまま成り立ち，

$$2\varphi G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + T^{\phi}_{\mu\nu} - 2\left(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu\right)\varphi \tag{4.3}$$

となるが，$T_{\mu\nu}$ の内容が違う．(4.1)，(4.2) 式から得られるのは，

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi + g_{\mu\nu}\left(-\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\partial_\rho\Phi\partial_\sigma\Phi - \frac{f}{4}\phi^2\Phi^2 - \frac{\lambda_\Phi}{4!}\Phi^4\right) \tag{4.4}$$

である．これより，

$$T = -(\partial\Phi)^2 - f\phi^2\Phi^2 - \frac{\lambda_\Phi}{3!}\Phi^4 \tag{4.5}$$

を得る．質量がない場合でも T がゼロにならないのがスカラー場の特色である．

ϕ の方程式 (2.20) 式に相当するのは，

$$\xi\phi R + \epsilon\Box\phi - \frac{f}{2}\phi\Phi^2 = 0 \tag{4.6}$$

で，また Φ についての同様な方程式

$$\Box\Phi - \frac{f}{2}\phi^2\Phi - \frac{\lambda_\Phi}{3!}\Phi^3 = 0 \tag{4.7}$$

も得られる．

(4.6) 式に ϕ を掛けて，

$$2\varphi R + \epsilon\phi\Box\phi - \frac{f}{2}\phi^2\Phi^2 = 0 \tag{4.8}$$

また (4.3) 式の対角和をとり，(4.5) 式を使って，

$$\begin{aligned} -2\varphi R = &-\epsilon\,(\partial\phi)^2 - 6\Box\varphi - (\partial\Phi)^2 \\ &-f\phi^2\Phi^2 - \frac{\lambda_\Phi}{3!}\Phi^4 \end{aligned} \tag{4.9}$$

を得る．(4.8) 式と (4.9) 式とから R を消去すると，

$$\left(6 + \epsilon\xi^{-1}\right)\Box\varphi = -\frac{1}{2}\Box\Phi^2 \tag{4.10}$$

となるが，これを，

$$\Box\left(\varphi + \zeta^2\frac{1}{2}\Phi^2\right) = 0 \tag{4.11}$$

と書き直しておく．ϕ の物質結合がある以上 (2.15) 式は厳密には成り立たない．

いよいよスケール不変性の詳しい議論にはいろう．まず 3 章におけると同様

$$g_{\mu\nu} = \Omega^{-2}g_{*\mu\nu} \tag{4.12}$$

によって新しい計量 $g_{*\mu\nu}$ に移る．しかし 3 章とは違って，ここでの Ω は x に依存しない定数とする．あるいは，

$$g_{\mu\nu} \to g_{*\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \tag{4.13}$$

という，「場の量の変換」と考えてもよい．**無限小変換**を考えるために，

$$\Omega = \mathrm{e}^{\Lambda} \quad (|\Lambda| \ll 1) \tag{4.14}$$

と書くと (4.13) 式は，

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \qquad \text{ただし} \quad \delta g_{\mu\nu} = 2\Lambda g_{\mu\nu} \tag{4.15}$$

と表される．

一方 (3.14) 式で Ω を定数としてみればわかるように，

$$R = \Omega^2 R_* \tag{4.16}$$

であり，また (3.7)，(3.8) 式は同じように成り立つ．

$$g^{\mu\nu} = \Omega^2 g_*^{\mu\nu} \tag{4.17}$$

$$\sqrt{-g} = \Omega^{-4}\sqrt{-g_*} \tag{4.18}$$

したがって，

$$\phi = \Omega\phi_* \tag{4.19}$$

という変換を ϕ に施せば，非最小結合項はもとと同じ形に保たれる．

$$\sqrt{-g}\frac{1}{2}\xi\phi^2 R = \sqrt{-g_*}\frac{1}{2}\xi\phi_*^2 R_* \tag{4.20}$$

つまり，この項は**スケール不変**である．

(4.19) 式も無限小変換の形に書くことができ，

$$\phi \to \phi + \delta\phi, \quad \text{ただし} \quad \delta\phi = -\Lambda\phi \tag{4.21}$$

となる．

このとき ϕ の運動エネルギー項も，同時にスケール不変になることはすぐにわかる．Φ についても全く同様で，

$$\Phi = \Omega\Phi_* \tag{4.22}$$

とすれば，Φ の運動エネルギー項はもちろん，多項式の相互作用項は ($\sqrt{-g}$ をつけて) すべて不変となる．もちろん，

$$\delta\Phi = -\Lambda\Phi \tag{4.23}$$

である．

以上のように，大域的変換に対する不変性がある場合，**ネーター (Noether) の定理**によって**保存流**を導くことができる．その一般的な処方は，

$$\Lambda J^\mu = \sum_{u=g_{\mu\nu},\phi,\Phi} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu u}\delta u \tag{4.24}$$

によって与えられる．ただし，ラグランジアンは，場の量 u の1階微分までを含むものとする．したがって $g_{\mu\nu}$ については，2章で行ったような方法で，2階の微分を取り除いておかなければならない．再び詳細は付録Gに譲るが，結果は次のようになる．

$$J^\mu = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\left(\xi\zeta^{-2}\phi^2 + \Phi^2\right) \tag{4.25}$$

これの保存則は，

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\Box\left(\xi\zeta^{-2}\phi^2 + \Phi^2\right) \tag{4.26}$$

と書くことができるが，(4.11) 式により，右辺はゼロとなる．したがって，J^μ は保存されることがわかった．

J^μ の中に計量の微分が現れていないことが奇異に感じられるかもしれな

い．しかし ϕ の微分は含まれており，またこれは $g_{\mu\nu}$ と混合しているために，特に J_0 は計量に対する変換の母関数ともなっているのである．

4.2 ディラトン

このままでは素粒子 (Φ) に質量はなく，重要な点で現実性を欠く．しかしこれについては，3 章で考えた共形変換が示唆を与えてくれる．ただし，あとで量子論的な**異常効果**を重視し，その場合の**正則化** (regularization) の手段として，**連続次元法**を採用したいので，時空の次元数を任意の値と考えた式を書いておくことにする．

次元数を N と書く．一応自然数とみなしておくが，式の上では連続数と考えることができ，最終的には $N \to 4$ という極限をとる．また，

$$\nu \equiv \frac{N}{2} \tag{4.27}$$

という記号も使うことにする．

共形変換としては (3.6)，(3.7) 式と同じで，

$$g_{\mu\nu} = \Omega^{-2} g_{*\mu\nu}, \quad \text{あるいは} \quad g^{\mu\nu} = \Omega^2 g_*^{\mu\nu} \tag{4.28}$$

であるが，(3.8) 式は，

$$\sqrt{-g} = \Omega^{-N} \sqrt{-g_*} \tag{4.29}$$

となる．ここで Ω は，再び時空座標の関数とみなすのである．

任意次元における R の変換則は付録 D に与えてあるが，あとで重要になるのは $N-4$ が**発散積分**にかかる場合であり，R の表式についてはそのようなことはないので，(3.14) 式をそのまま使ってよい．

$$R = \Omega^2 \left(R_* + 6\Box_* f - 6 g_*^{\mu\nu} f_\mu f_\nu \right) \tag{4.30}$$

ただし，Ω のべきは次元数にかかわらず，正確に 2 である．したがって (3.19) 式における Ω のべきは $2-N$ と変更され，したがって (3.20) 式は

$$\xi \phi^2 = \Omega^{N-2} \tag{4.31}$$

となる．正準場 σ との関係は (3.38) 式

$$\phi = \xi^{-1/2} e^{\zeta\sigma} \tag{4.32}$$

と同様であるとしてよいので,

$$\Omega = \exp\left(\frac{1}{\nu - 1}\zeta\sigma\right) \tag{4.33}$$

となる.

実は ζ も次元数の関数で,

$$\zeta^{-2} = 4\frac{N-1}{N-2} + \epsilon\xi^{-1} \tag{4.34}$$

で与えられるのだが, やはり $N \to 4$ で特別のふるまいを示すことはないので, $N = 4$ での値として, 以前の (2.28) 式をそのまま使う.

さて $L_{\rm m}$ の部分を調べよう. まず Φ の運動エネルギー項である. これについては,

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g_*}g_*^{\mu\nu}\Omega^{-N+2} \tag{4.35}$$

となるので,

$$\Phi = \Omega^{\nu-1}\Phi_* \tag{4.36}$$

とおくと, 正準形とすることができる.

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi = -\frac{1}{2}\sqrt{-g_*}g_*^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu\Phi_*\mathcal{D}_\nu\Phi_* \tag{4.37}$$

ここで,

$$\mathcal{D}_\mu\Phi_* \equiv (\partial_\mu + \zeta(\partial_\mu\sigma))\Phi_* \tag{4.38}$$

である.

こうして (4.1) 式は,

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g_*}\left(\frac{1}{2}R_* - \frac{1}{2}g_*^{\mu\nu}\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma + L_{*\rm m}\right) \tag{4.39}$$

となる. ただし,

$$L_{*\rm m} = -\frac{1}{2}g_*^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu\Phi_*\mathcal{D}_\nu\Phi_* - \exp\left(2\frac{\nu-2}{\nu-1}\zeta\sigma\right)\left(\xi^{-1}\frac{f}{4}M_{\rm P}^2\Phi_*^2 + \frac{\lambda_\Phi}{4!}\Phi_*^4\right) \tag{4.40}$$

である. ここでは (4.32), (4.33) 式および (4.36) 式を使った. 最後の式では $M_{\rm P}$ を明示し, 次元をもつ定数が現れたことを強調しておいた. こうして, 重力定数とともに Φ_* の質量項が登場したのである.

このシナリオの要点を手短にまとめておこう. この章では, 次元をもつ定

数を全く含まない理論から出発した．すなわち，普通の意味でのものさしや，時計が全くない世界を出発点としたのである．しかし，共形変換の際，プランク質量 M_{P} を導入した．この章の式でいえば，(4.31) 式の右辺には，実は M_P^{N-2} がかかっていたのである．ϕ は次元をもっているので，やはり次元をもつ定数の存在を認めないかぎり，このような式は書けなかったはずである．ラグランジアンの中で排除したこの定数を，それから導かれる「解」の中では許容する，というこのやり方は，まさに対称性の自発的な破れの考えにほかならない．

対称性の自発的な破れの場合，それを誘導するポテンシャルを考える場合が多いが，スケール不変性の場合，その行き方は原理的に困難である．それでも，次元をもつ定数を含む解が存在するならば，自発的に壊れる対称性の基本的な特徴を備えていると考えてよい．そのような例としては，カルーザ・クライン (Kaluza–Klein) 理論をあげることができるだろう．すなわち，多次元時空の一部が小さな閉じた空間になると考えるのだが，これも，多次元のアインシュタイン方程式がそういう解を許容することに基づいており，**自発的コンパクト化**とよばれている．

具体的なポテンシャルが利用できない場合の問題点は，求める解の安定性を議論できないことであろうが，今の問題の場合，宇宙論的な考察から，別の解釈が可能になるかもしれない．そのような点は，しばらくは問わないこととし，対称性が自発的に壊れるのに伴ういろいろな特徴を，あとで議論することにする．

ところで，(4.40) 式をみると，微分を含まない σ は，Φ_* の多項式の部分の指数関数の中にまとめて現れていること，また $\nu=2$ ではそれがなくなってしまうことが注目される．すなわち，4 次元では σ は物質との結合をもたない．ただし，(4.38) 式からわかるように，σ の微分結合は残るが，現象として特に興味があるのは，σ への 4 次元運動量移動がきわめて小さい場合となるので，やはり物質との非結合がスケール不変な理論の帰結ということになる．しかしスケール不変性は実際には破れているので，それに応じて物質と

の結合が生じてくる．この点が次節の議論の主題である．

あとの応用では σ を含む指数関数を展開して，

$$\exp\left(2\frac{\nu-2}{\nu-1}\zeta\sigma\right) \approx 1+2\zeta(\nu-2)\sigma \tag{4.41}$$

とする．ここで分母の $\nu-1$ は，$\nu=2$ の付近で特別のふるまいを示さないので，$2-1=1$ とおいてしまった．

(4.41) 式の第 1 項からの寄与は，「重力的」な場 σ を含まないので，普通の電弱統一理論，あるいは大統一理論におけるヒグス場と同じように処理する．

すなわち，

$$f<0, \qquad \text{および} \quad \lambda_\Phi>0 \tag{4.42}$$

と仮定すると，$\Phi_*=0$ は安定ではないので，

$$\Phi_*=v+\tilde{\Phi} \tag{4.43}$$

とおいて，新しい場 $\tilde{\Phi}$ と**真空期待値** v を求める．そうすると，(4.40) 式の指数関数を 1 とした部分は，

$$-L_0' = L_{\rm vac}+\frac{1}{2}\mu_\Phi^2\tilde{\Phi}^2+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_\Phi}{3}}\mu_\Phi\tilde{\Phi}^3+\frac{\lambda_\Phi}{4!}\tilde{\Phi}^4 \tag{4.44}$$

となる．ここで，

$$v^2=-\frac{3f}{\xi\lambda_\Phi}M_{\rm P}^2, \qquad \text{および} \quad \mu_\Phi^2=-\frac{f}{\xi}M_{\rm P}^2 \tag{4.45}$$

である．また，

$$L_{\rm vac}=-\frac{3}{8}\frac{f^2}{\xi^2\lambda_\Phi}M_{\rm P}^4 \tag{4.46}$$

は**宇宙項**の役割を果たす．

古典論としては，ここで $N=4$，あるいは $\nu=2$ とおいてよい．したがって，物質場 $\tilde{\Phi}$ は σ とは全く結合せず，したがって B–D 理論の場合のように，普通の物質相互間の力を測定するなどの手段で観測することは不可能であることは，すでに述べたとおりである．もちろん，宇宙論的な場面では，その効果が現れることは期待できるが，実は量子論的な効果によって，スカラー場が直接「みえる」可能性があり，次節で議論される．しかしその前に，σ はスケール

変換の自発的破壊に伴う南部・ゴールドストーンボゾン (**Nambu–Goldstone boson, N–G ボゾン**) の働きをしていることを確かめておきたい.

その出発点は，ネーター流 J^μ とその保存則にある．今まではスケール変換，あるいはその不変性という語を使ってきたが，そのほかに**伸縮変換** (dilatation), また伸縮対称性という術語も使われることがある．そこで (4.25) 式で導入されたネーター流を，以後，**伸縮流**とよぶことにする．これを，E 系での場 $g_{*\mu\nu}$, σ と Φ_* で書き直すと，

$$J^\mu = \frac{1}{2}\sqrt{-g_*}g_*^{\mu\nu}\left[2\zeta^{-1}\partial_\nu\sigma + (\partial_\nu + 2\zeta\partial_\nu\sigma)\Phi_*^2\right] \tag{4.47}$$

となる．右辺に σ について線形の項が現れていることがわかる．これは，対称性の自発的破壊の特徴で，そこに現れるスピン 0 の場は，その対称性に伴う N–G ボゾンとよばれる．伸縮対称性に伴うのでディラトン (dilaton) という名がつけられている.

$$Q = \int d^3x J^0 \tag{4.48}$$

によって伸縮変換の母関数を作ると，σ の線形項のために，Q は真空を消滅させない.

$$Q \mid 0\rangle \neq 0 \tag{4.49}$$

これも対称性が自発的に破れる場合の特徴である.

さらに (4.39) 式からわかるように，σ の質量項は存在しない．すなわち，ディラトンは質量がゼロであり，やはり対称性の自発的破壊の条件を備えている．このことのために，E 系での理論では，伸縮流の保存が成り立ったまま (4.40) 式で Φ_* の質量項が生じ，その結果 $\tilde{\Phi}$ は質量 μ_Φ をもつことが可能となったのである.

(4.47) 式が，E 系の場の方程式の結果，実際に保存されることをみるには，特に σ の方程式を用いなければならないが，それは (4.39) 式および (4.40) 式から導かれる.

$$\left(1 + \zeta^2\Phi_*^2\right)\Box_*\sigma + \frac{1}{2}\zeta\Box_*\Phi_*^2 + \zeta^2 g_*^{\mu\nu}\partial_\mu\sigma\partial_\nu\Phi_*^2 = 0 \tag{4.50}$$

この節の最後に，結合定数 f の大きさについて考えておこう．$\tilde{\Phi}$ は「普通

の」素粒子の代表で，したがってその質量は，きわめておおざっぱにいって GeV のオーダーである．今の単位系でいえば，

$$\mu_\Phi \sim 10^{-18} \tag{4.51}$$

といったところである．これを (4.45) 式の第 2 式と比べると，

$$\xi^{-1} f \sim 10^{-36} \tag{4.52}$$

でなければならないことが結論される．ξ^{-1} は 1 のオーダーであるとすると，f 自身がこれくらいの大きさということになる．

こんなに小さな数が基本的な結合定数として許されるか，という疑問も生ずるかもしれない．これはまさにディラックの巨大数仮説の動機となった疑問である．しかし一方，これは何かの「微調整」の結果と考える必要は，必ずしもないことも指摘しておこう．

このオーダーの数を 1 つでも導入すれば，あとは「普通の」素粒子の世界が広がることになる．たとえば (4.45) 式の第 1 式は，「強い」相互作用の結合定数 λ_Φ が，だいたい 1 のオーダーであるかぎり，v もやはり GeV の程度であることを示す．またこれまではフェルミオンを考えなかったが，その質量は標準理論におけるシナリオに従って，上記 v から導かれると考えてよい．

4.3 量子効果

以上は古典的理論としては正しいが，量子論的効果を入れると結論が変わってみえる部分がある．特に，σ が物質場に結合し，それが WEP を破ることが示される．それを示すために，(4.40) 式で，σ について 1 次の項を取り出す．それは (4.41) 式を (4.40)，(4.44) 式で使って，($L_{\rm vac}$ を除いて)

$$-L_1' = 2\zeta(\nu-2)\left(\frac{1}{2}\mu_\Phi^2\tilde{\Phi}^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_\Phi}{3}}\mu_\Phi\tilde{\Phi}^3 + \frac{\lambda_\Phi}{4!}\tilde{\Phi}^4\right)\sigma \tag{4.53}$$

と書かれる．一応 $N \neq 4$，すなわち $\nu \neq 2$ としておいて，計算の最後の段階で $\nu \to 2$ の極限をとることにする．量子場に特有の発散積分は，$\nu = 2$ に

おける極として表すことができるので，$(\nu-2)$ が掛けられると，有限の寄与を残すことになる．これは，はじめから $\nu=2$ とおいて得られる古典的な結果と異なるので，**異常項**とよばれ，現在の素粒子論で重要な役割を果たすことが知られている．そこで，(4.53) 式によって与えられる σ 結合が，$\tilde{\Phi}$ の 1 ループで発散するダイアグラムとともに現れるものを探すと，$\tilde{\Phi}$ の 2 次の項の範囲で，図 4.1 の 3 種類が浮かび上がる．

説明の便宜上，図 4.1(b) から始めよう．微分を含まない σ の源としてこのダイアグラムからくる寄与 $\mathcal{J}_b$ は，

$$\mathcal{J}_b = -i\zeta\lambda_\Phi(N-4)(2\pi)^{-N}\int \mathrm{d}^N k \frac{1}{k^2+\mu_\Phi^2} \tag{4.54}$$

となる．

このループ積分は，4 次元では 2 次発散を示すが，N が十分小さければ (今の場合 $N<2$) 有限となり，そこからガンマ関数を用いて大きな N に解析接続できる．詳細は付録 H で説明するが，今の場合，$\nu\approx 2$ に対し，

$$I_b \equiv \int \mathrm{d}^N k \frac{1}{k^2+\mu_\Phi^2} = i\pi^2\left(\mu_\Phi^2\right)^{\nu-1}\Gamma(1-\nu) \tag{4.55}$$

と表される．これを (4.54) 式の中で用いるが，その際

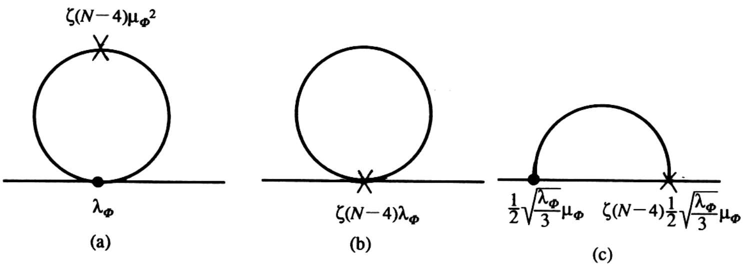


図 4.1 異常項を生ずるダイアグラム．

$$(\nu-2)\,\Gamma\,(1-\nu) = -\frac{1}{1-\nu}\,(2-\nu)\,\Gamma\,(2-\nu)$$
$$= -\frac{1}{1-\nu}\Gamma\,(3-\nu) = 1 \tag{4.56}$$

という関係を使う．こうして，

$$\mathcal{J}_b = \zeta\lambda_\Phi \frac{\mu_\Phi^2}{8\pi^2} \tag{4.57}$$

を得る．予告しておいたように，$\nu-2$ が $\Gamma(1-\nu)$ の $\nu=2$ における極を打ち消して，有限値を与えている．

次に図 4.1(a) に移ろう．これから生ずるのは，

$$\mathcal{J}_a = i\,(2\pi)^{-N}\,\zeta\lambda_\Phi\mu_\Phi^2\,(N-4)\,I_a \tag{4.58}$$

ただし，

$$I_a = \int \mathrm{d}^N k \frac{1}{\left(k^2+\mu_\Phi^2\right)^2} \tag{4.59}$$

である．

この積分は，形式的に，

$$I_a = -\frac{\partial}{\partial\mu_\Phi^2} I_b \tag{4.60}$$

と書くことができる．(4.55) 式を右辺に代入すると，

$$I_a = i\pi^2\mu_\Phi^{\nu-2}\,(1-\nu)\,\Gamma\,(1-\nu) = i\pi^2\Gamma\,(2-\nu) \tag{4.61}$$

を得る．さらに，これを (4.58) 式に代入することにより，

$$\mathcal{J}_a = \zeta\lambda_\Phi \frac{\mu_\Phi^2}{8\pi^2} = \mathcal{J}_b \tag{4.62}$$

となる．

最後に図 4.1(c) (の 2 倍) を計算する．

$$\mathcal{J}_c = 12i\,(2\pi)^{-N}\zeta\lambda_\Phi\mu_\Phi^2\,(\nu-2)\,I_c \tag{4.63}$$

ここで，

$$I_c = \int \mathrm{d}^N k \frac{1}{((q-k)^2+\mu_\Phi^2)(k^2+\mu_\Phi^2)} \tag{4.64}$$

である．これも標準的な計算法により，

$$I_c = \int_0^1 \mathrm{d}x \int \mathrm{d}^N k \frac{1}{(k^2+a^2)^2} \tag{4.65}$$

となる．ただし，

$$a^2 = \mu_\Phi^2 + x(1-x)q^2 \tag{4.66}$$

である．これにより，$q^2 = -\mu_\Phi^2$ では，

$$\int \mathrm{d}^N k \frac{1}{(k^2+a^2)^2} = i\pi^2 \Gamma(2-\nu)\left(\mu_\Phi^2\right)^{\nu-2}\left(1-x+x^2\right)^{\nu-2} \tag{4.67}$$

となる．

(4.63) 式においてすでに $2-\nu$ がかかっているので，(4.67) 式においては，$\Gamma(2-\nu)$ 以外では $\nu=2$ とおいてかまわない．この意味で，

$$I_c = i\pi^2 \Gamma(2-\nu) \tag{4.68}$$

である．こうして，

$$\mathcal{J}_c = \frac{3}{4\pi^2}\zeta\lambda_\Phi\mu_\Phi^2 \tag{4.69}$$

が得られる．

(4.57)，(4.62)，(4.69) 式を加え合わせて，

$$\mathcal{J} = \frac{1}{\pi^2}\zeta\lambda_\Phi\mu_\Phi^2 \tag{4.70}$$

を得る．これを実効的ラグランジアンの形で示すと，

$$-L_{\Phi\sigma} = \frac{1}{2\pi^2}\zeta\lambda_\Phi\frac{\mu_\Phi^2}{M_\mathrm{P}}\tilde{\Phi}^2\sigma \tag{4.71}$$

となる．ここで M_P^{-1} を書き表して，全体の次元が正しくみえるようにした．

もしこの係数が $\cdots\zeta\lambda_\Phi\mu_\Phi^2$ ではなく，$\zeta(1/2)(\mu_\Phi^2+\delta\mu_\Phi^2)$ であったとしよう．ただし，$\delta\mu_\Phi^2$ は 1 ループでの自己エネルギーで，この場合，発散している．もしこういう形になっていれば，σ の源は $\tilde{\Phi}$ の全エネルギーに比例していることになり，少なくとも 1 粒子の状態については**組成非依存性**が成り立っていたはずである．しかし (4.71) 式はそうはなっていないので，けっきょく (4.71)

式は WEP を破る結合となっていることが結論される．

標準理論に従って，フェルミオンの質量は Φ_* との湯川相互作用

$$-L_{\psi\Phi} = g_Y\overline{\psi}\psi\Phi_* \tag{4.72}$$

によって生ずるとしてみよう．すなわち，

$$m = g_Y v \tag{4.73}$$

こういう結合があると，次のダイアグラムによって σ は ψ に結合することになる (図 4.2)．この積分は収束し，その結果は，実効ラグランジアン

$$-L_{\psi\sigma} = g_\sigma\overline{\psi}\psi\sigma \tag{4.74}$$

と表される．ここで，その結合定数は，

$$g_\sigma = \frac{3}{2}\frac{m}{M_{\rm P}}\zeta\lambda_\Phi\frac{g_Y^2}{4\pi}F_1\left(\frac{m^2}{\mu_\Phi^2}\right) \tag{4.75}$$

ただし，

$$F_1(x) = \frac{1}{6\pi^3}\frac{1}{x-1}\left[-\frac{5}{2} - \frac{1}{x-1} + \frac{x(2x-1)}{(x-1)^2}\ln x\right] \tag{4.76}$$

とおいた．また (4.75) 式ではやはり $M_{\rm P}^{-1}$ を明示して，g_σ が無次元であることを示した．

この g_σ は m に比例してはいるが，g_Y，λ_Φ や μ_Φ/m にも依存する．いわば，その粒子の「内部構造」に関係している．したがって，いくつかのフェルミオンがあった場合，それらの g_σ の比が，ちょうどそれぞれの質量 m の比になるとは考えられない．その意味で σ の結合は WEP を破ることになる．

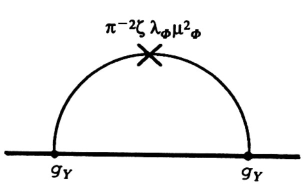


図 4.2　フェルミオンとの結合を生ずるダイアグラム．

次に σ が ψ や Φ に結合するとなると，それらのループを通じて σ が自己エネルギーをもつようになる．ベクトル場ならばゲージ不変性，フェルミオンならばカイラル不変性を考えることができ，質量が常にゼロとなるような機構が存在しうる．しかし今の理論には，こうして σ が質量をもつのを防ぐ「免疫性」は備わっていない．

たとえば，物質場として Φ を考えた場合，図 4.3 のようなダイアグラムを考える．

このダイアグラムでは，頂点の片方に $N-4$ があり，他方ではすぐ上で計算した異常 (anomalous) なもの，(4.71) 式がはいっており，実際は $(N-4)^2 \times 2$ ループダイアグラムからきたものである．とにかく，これはやはり異常な項として計算することができ，

$$\mu^2 = -i(2\pi)^{-N} 4(2-\nu)\zeta\mu_\Phi^2 \frac{\zeta\lambda_\Phi\mu_\Phi^2}{\pi^2} I_c \tag{4.77}$$

となる．(4.68) 式を使って計算すると，

$$\mu^2 = \frac{1}{4\pi^4}\zeta^2\lambda_\Phi \frac{\mu_\Phi^4}{M_{\mathrm{P}}^2} \tag{4.78}$$

を得る．

ただし，自己エネルギーとしては，上のような意味でうまく異常にはなら

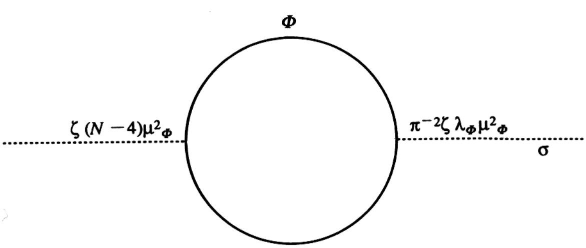


図 4.3 σ の自己エネルギーダイアグラムの一例．

ないダイアグラムも生じる．両方の頂点ともに $N = 4$ でゼロではない結合の場合がその一例である．このときの結果は 2 次発散する．しかし，**超対称性** (supersymmetry) が働いていれば，事実上のカットオフは超対称性の破れのスケール $M_{\rm ssb}$ で与えられると考えてよいだろう．その結果，σ は，

$$\mu^2 \sim g_\sigma^2 M_{\rm ssb}^2 \tag{4.79}$$

程度の質量 μ をもつことになるだろう．ここで $M_{\rm ssb}$ は，だいたい ~TeV の程度と考えられている．

ディラトンがゼロでない質量をもつと，伸縮流はもはや保存しなくなる．実際 (4.50) 式を使って計算すると，

$$\partial_\mu J^\mu = \zeta^{-1}\mu^2\sigma + 2(\nu - 2)\left(\frac{1}{2}\mu_\Phi^2\tilde{\Phi} + \cdots\right) \tag{4.80}$$

となる．ここで右辺第 2 項は (4.53) 式の $\zeta\sigma$ 以外の部分と一致し，結果として (4.70) 式の $\mathcal{T}$，つまり σ の物質結合の源を用いて $\zeta^{-1}\mathcal{T}$ と書き表せることとなる．これからさらに，

$$\mathcal{T} = \zeta\langle\partial_\mu J^\mu\rangle \tag{4.81}$$

という興味ある結果も得られる．ここで右辺の $\langle\cdots\rangle$ は，物質の量子論的な期待値を表す．

このように保存則が成り立たなくなることは，スケール不変性が実質的に破られたことを示している．ただ，質量が小さければ非保存の程度も小さいわけで，このような場合のボゾン場は**擬 N–G ボゾン** (pseudo Nambu-Goldstone boson) とよばれる．実際，素粒子論における自発的対称性破壊の発見のきっかけとなった π メゾンは質量をもっており，擬 N–G ボゾンの最適の見本と考えられている．

伸縮流の非保存をもたらす実質的な破れについて，以前は無理に次元をもつ量を導入するなどの方法がとられたが，ここでは量子異常項によって，それがほとんど「知らない間に」起こってしまっている．そもそも，発散を含む理論には，ラグランジアンで用意されたパラメータのほかに，どうしても次元をもつ量がはいってきてしまい，それが伸縮不変性を「自然に」破ってしまうのである．広い意味での自発的な破れとみることもできる．

4.4　有限到達距離重力

こうして有限の質量をもつことになったディラトンの交換によって生ずる力は，簡単に計算できる．具体的に (4.74) 式を使えば，静止している 2 個の ψ 粒子の間のポテンシャルは，

$$V_\sigma(r) = -\frac{g_\sigma^2}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mu r}}{r} \tag{4.82}$$

という湯川ポテンシャルとなる．さらに (4.75) 式によれば，

$$\frac{g_\sigma^2}{4\pi} = \alpha_5 G_0 m^2 \tag{4.83}$$

ここで $M_{\mathrm{P}}^{-2} = 8\pi G_0$ を使い，また，

$$\alpha_5 = 2\zeta^2\left(\lambda_\Phi \frac{g_Y^2}{4\pi}F_1\right)^2 \tag{4.84}$$

である．これは無次元の係数である．この係数は素粒子の種々の定数に複雑に依存していて，すぐに確定的な値を与えることは困難であるが，だいたいのところ，1 のオーダーとみなしてよい．といっても何桁かの不定性が残る．この不定性の範囲で，(4.82) 式は重力のニュートンポテンシャルと基本的に同じ強さをもつことが期待される．

一方，(4.82) 式は有限到達距離の力を表しており，その到達距離は，

$$\lambda = \frac{1}{\mu} \tag{4.85}$$

で与えられる．これがどの程度の距離であるか，調べておこう．

(4.79) 式から，

$$\mu \sim g_\sigma M_{\mathrm{ssb}} \tag{4.86}$$

である．ところで (4.74) 式と (4.84) 式とから，

$$g_\sigma = \sqrt{\frac{\alpha_5}{2}}\frac{m}{M_{\mathrm{P}}} \tag{4.87}$$

これを (4.86) 式に代入すると，

$$\mu \sim \alpha_5^{1/2} \frac{M_{\rm ssb}}{M_{\rm P}} m \tag{4.88}$$

となる．$m \sim$GeV，$M_{\rm ssb} \sim$TeV とすると，$M_{\rm ssb}/M_{\rm P} \sim 10^{-15}$ となるので，

$$\mu \sim \alpha_5^{1/2} \times 10^{-15}\ {\rm GeV} \tag{4.89}$$

を得る．さらに GeV に相当する長さは $\sim 10^{-14}$ cm であるので，

$$\lambda \sim \alpha_5^{-1/2} \times 10^{15} \times 10^{-14}\,{\rm cm} \sim \alpha_5^{-1/2} \times 10\,{\rm cm} \tag{4.90}$$

となる．

(4.79) 式でなく (4.78) 式を用いると何桁か異なる値となるだろうが，これも理論的不定性の 1 つの表れである．

(4.84) 式によれば α_5 は ζ^2 に比例し，これはまた ξ にほぼ比例することを考えると，α_5 は 1 よりもかなり小さいかもしれない．そうだとすると，λ も 10 cm などよりずっと長いかもしれない．いずれにしても，これらの量の評価には現在のところ何桁もの理論的不定性があることは認めなければならない．そういう問題点にもかかわらず，この程度の距離が，重力と素粒子理論を結びつける際の特徴的な長さであることは注目に値する．しかも**巨視的な距離**であり，また以前には，実験的に十分精密に調べられてこなかった領域であったので，特に実験家の興味を引くこととなった．強い力の到達距離がミクロな大きさであり，それとほんとうの長距離力との中間という意味で，**中間距離力** (medium-range force, intermediate-range force) とよばれることもある．さらには，**非ニュートン的重力** (non-Newtonian gravity) というよび方も用いられた．

このように，非常に小さな質量が出現することになった背景について，もう一度ふりかえっておこう．もしスカラー場が統一理論の中で登場するものならば，それは $M_{\rm P}$ 程度の質量をもつ可能性が高い．実際，統一理論が予言する粒子の多くは，この理由で実際には観測されない，と考えられている．そのような一般的な事情に対する例外が，ゲージ不変性をもつベクトル場であ

り，またカイラル不変性をもつフェルミオンである．また，それらを含む超対称な粒子群は，やはり第0近似として質量がゼロとなり，対称性の破れとともに，われわれの観測の対象となる「軽い」素粒子群となっているのだろう．重力的スカラー場は，それとは違った類別にはいるとすれば，どんな理由で「軽く」なりうるだろうか．1つの答が，N–G ボゾンで，特に伸縮変換に伴うディラトンは有望な考えである．特別な理由なしに，古典論として質量ゼロが仮定されたB–D 理論とは，この点で違った面があることも指摘しておきたい．

有限到達距離重力を観測結果と比べる際には，(4.82) 式と (4.83) 式を，通常のニュートンポテンシャルといっしょにして，

$$V(r) = -\frac{G_0 m^2}{r}\left(1 + \alpha_5 \mathrm{e}^{-r/\lambda}\right) \tag{4.91}$$

と書くのが便利である．

このような付加項があると，たとえば地上における落下運動に対してどの程度の影響があるだろうか．だいたいの目安をまずおさえておこう．地球が球体ならば，ニュートンポテンシャルの場合は，r は物体と球体の中心との間の距離としてよかったが，$\mathrm{e}^{-r/\lambda}$ がかかっていると，補正が必要で，それは $r \gg \lambda$ になると寄与を非常に小さくし，また計算を複雑にする．問題を簡単にするために，地平面からの高さが λ に比べて小さく，また λ は地球の半径に比べて小さいとしてみよう．ニュートンの力の場合，物体に働く加速度は，

$$g = G_0 \frac{M_\oplus}{R_\oplus^2} = G_0 \frac{4\pi}{3}\rho_{\mathrm{av}} R_\oplus \approx 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \tag{4.92}$$

で与えられる．ここで $M_\oplus$, $R_\oplus$ はそれぞれ地球の質量，半径で，また ρ_{av} はその平均密度である．

一方，有限到達距離力に寄与するのは，おおざっぱにいって物体の位置から半径 λ の範囲の (半球内の) 物質のみだから，

$$g_5 \approx \alpha_5 G_0 \frac{1}{\lambda^2}\frac{3\pi}{8}\rho_{\mathrm{surf}}\lambda^3 = \alpha_5 G_0 \frac{3\pi}{8}\rho_{\mathrm{surf}}\lambda \tag{4.93}$$

となる．ここで，ρ_{surf} は地球の表面近くの平均密度を意味する．

(4.92), (4.93) 式より,

$$\frac{g_5}{g} \approx \frac{1}{2}\alpha_5 \frac{\rho_{\rm surf}}{\rho_{\rm av}} \frac{\lambda}{R_\oplus} \tag{4.94}$$

を得るが, $\rho_{\rm surf}/\rho_{\rm av} \sim 1/2$ としてよいだろうから, この比はけっきょく,

$$\frac{g_5}{g} \sim \alpha_5 \left(\frac{\lambda}{\rm m}\right) \times 10^{-7} \tag{4.95}$$

のオーダーとなる. ここで $(\lambda/{\rm m})$ は, λ をメートルを単位にして測った値のことである. たとえ $\alpha_5 \sim 1$ であっても, ニュートン力に対する比はこのように小さなものとなり, 身のまわりの現象としてはとらえにくくなるのである.

地球が平坦ではなく, 球であることを考慮するとこの比には,

$$\mathcal{F}(z) = \frac{3(1+z)}{z^3}{\rm e}^{-z}\left(z\cosh z - \sinh z\right) \tag{4.96}$$

という関数を掛けなければならない. ここで, $z = R_\oplus/\lambda$ である. ただし, 球体の密度は一定とした場合で, そうでなければ, もっと複雑な補正も必要となる.

さて, これまでは同じ素粒子 ψ の間の力に限られてきた. 異なる素粒子, たとえば ψ_i, ψ_j の間に働く力の場合には, 適当な変更が必要である. すなわち, σ との結合定数を $g_{\sigma i}$ と $g_{\sigma j}$ と書くとき, それらが $(m_i/M_{\rm P})\zeta$ に比例するまでは共通だが, それ以外の係数は, それぞれによって異なる. それが組成依存性の原因である. したがって, 係数 α_5 は, 一般には粒子の種類に依存する. その意味で $\alpha_{5\,ij}$ と書くべきだろう.

しかし, これまでの実験的研究によると, 組成依存性はあまり大きくはないようにみえる. すなわち, $\alpha_{5\,ij}$ が 粒子の種類 i, j ごとに異なる度合はあまり著しくないようである. その場合, 係数の全体的な大きさを共通な係数 α_5 で表し, それに種類によって異なる係数 q_i を掛けるという表現が便利であろう. こうして (4.91) 式を一般化した式

$$V_{ij}(r) = -\frac{G_0 m_a m_b}{r}\left(1 + \alpha_5 q_i q_j {\rm e}^{-r/\lambda}\right) \tag{4.97}$$

が得られる. q_i は一種の "charge" で電荷と似たところがあり, だいたいの大

きさはほぼ1の程度と考えてよい．

(4.91) 式または (4.97) 式の形は，素粒子間にかぎらず，巨視的な2物体の間に働く力に対しても適用されると考えてよい．もちろん m_i はそれら物体の質量であるし，q_i はそれぞれの物体の組成によって決まる．その詳細は，物体を構成する原子や原子核の性質に依存する．

実際には，原子核に比べて電子の質量は小さいので，物質の「種類」は，まず原子核の種類と考えることになる．原子核は核子 (陽子，中性子) からできていて，原子核の質量はおおまかにいって核子の質量の和である．しかし，核子の間には核力が働いていて，そのための**束縛エネルギー**がある．ところが，核子あたりの束縛エネルギーは原子核によってかなり違う．といっても，割合にして $\sim 10^{-3}$ 程度であるが，もしスカラー場が核子に結合する強さと，束縛エネルギーに結合する強さが異なるならば，原子核ごとに q_i が異なってくるだろう．たとえば $q_{\mathrm{Be}} \neq q_{\mathrm{Cu}}$ などといった具合である．

このような性質を示す具体的な模型として**重力的ベクトル場**の理論がある．スカラー場の模型とは違った点もあるが，現象論的な議論として広く用いられているので紹介しておこう．

バリオン数に結合するベクトル場があるとする．すなわち，原子核を構成する陽子や中性子には同じ強さで結合するが，それらの間にある束縛エネルギーを与える何かの「場」には結合しない．したがって質量数 A_i の原子核には $\alpha_5 A_i$ の程度の強さで結合する．一方，この原子核の質量 M_i は，

$$M_i = mA_i - B_i \tag{4.98}$$

で与えられる．ここで，m は核子の質量 (陽子と中性子の質量差は，簡単のため無視する)，B_i は束縛エネルギーである．したがって，

$$q_i = \frac{mA_i}{M_i} \approx 1 + \frac{B_i}{mA_i} \tag{4.99}$$

と書くことができる．この最後の項は，核子あたりの束縛エネルギーを核子質量で割ったものである．この量が原子核の種類によって異なった値をとる．

束縛エネルギーの例をあげると，Beでは6.5 MeV，Cuでは8.5 MeV，Auでは7.9 MeVといった具合である．$m \approx 940$ MeVだから，B_i/mA_i はそれぞれ 6.9×10^{-3}, 9.04×10^{-3}, 8.4×10^{-3} となる．これらの間の「差」がWEPの破れとなって観測されるはずである．

もう少し具体的に，それぞれ物質 i と物質 j でできた物体 i, j を，地球上で落下させてみる．あるいは，何か大きくて重い物体 S に向かって落としてみる．そのときの加速度 a_i は，

$$a_i = -\frac{G_0 M_S}{r^2}\left[1 + \alpha_5 q_S q_i \left(1 - \frac{r}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-r/\lambda} \mathcal{F}(z)\right] \tag{4.100}$$

と与えられる．ここで M_S は S の質量である．m_i がなくなっているが，これがWEP，すなわち重力質量が慣性質量に等しいことの結果である．しかし q_i と q_j が異なるとすると，a_i と a_j に差が出ることになる．その差 $\Delta a_{ij} \equiv a_i - a_j$ を計算する場合，q_S はほぼ1と考えてよいだろう．こうして，

$$\Delta a_{ij} = -\frac{G_0 M_S}{r^2} \alpha_5 \Delta q_{ij} \left(1 - \frac{r}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-r/\lambda} \mathcal{F}(z) \tag{4.101}$$

となる．今考えている具体例では，

$$\Delta q_{ij} = \frac{B_i}{mA_i} - \frac{B_j}{mA_j} \tag{4.102}$$

で，たとえば i, j を Be と Cu とした場合，-2.1×10^{-3} となる．以前考慮した補正を取り入れて，けっきょく，

$$\frac{\Delta a_{ij}}{g} = \left(1 - \frac{r}{\lambda}\right) \mathrm{e}^{-r/\lambda} \alpha_5 \Delta q_{ij} \mathcal{F}(z) \tag{4.103}$$

を得る．

実際に異なる物質の対を落下させて，その加速度の差を検出しようとする精密実験が行われた．また，少し間接的だが，古くからの方法であるエトベッシュのねじり秤の精密化や，そのほかにもさまざまな方法によってWEPの破れを見つける実験が遂行され，実験技術のうえで大きな進歩がみられた．しかし，これまでのところ，破れに対するはっきりした証拠はみつかっておらず，α_5 に対する上限が得られたのみである．それは λ をどう仮定するかによって異なる．

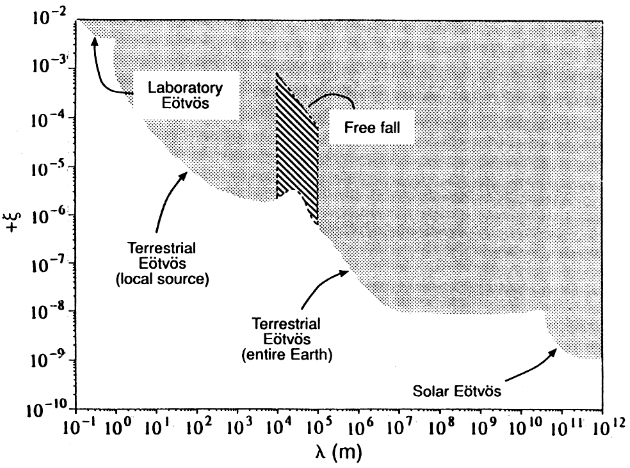


図 4.4 影をつけた部分はこれまでの組成依存性実験から排除される領域を表す．すなわち，領域の下端の曲線は，与えられた λ に対して α_5 の上限を与える．縦軸の $+\xi$ は，本文の α_5 と読み替える．[E.Fischbach and C.Talmadge, *Nature*, **356** 207,(1992).]

図 4.4 は，λ の関数として $|\alpha_5|$ の上限を示したもので，これまでに行われた多くの実験結果を総括したものである．これをみると α_5 は，あるとしても 1 より数桁小さいようにみえる．しかし，解析は q_i としてどんなものを仮定するかにかかっている．それは上にみたように，素粒子論の内容に関係しており，理論的な不定性は依然大きい．むしろ，実験的な結果から，理論に対する制約を見出そうという態度のほうが賢明かもしれない．

実験的な面についてこれまで述べてきた方法は，落下の加速度が物質の内部構造によって異なるかどうか，をみるものであって，**組成依存性実験** (composition-dependent experiments) とよばれる．これに対して**組成非依存性実験** (composition-independent experiments) とよばれる方法もある．これは (4.91) 式あるいは (4.97) 式に示される力の距離依存性を調べようとするものである．すなわち，重力として観測される力が，真に逆 2 乗則に従っているかどうかをチェックすることを目指す．この場合には組成依存性はほとんど問題にならないので，$q_i \approx 1$ として十分である．

$$V_{ij}(r) = -\frac{G_0 M_i M_j}{r}\left(1 + \alpha_5 \mathrm{e}^{-r/\lambda}\right) \tag{4.104}$$

これについては，次のような事情をまず明らかにしておこう．すなわち，$r \ll \lambda$ や $r \gg \lambda$ に対しては，(4.104) 式は，ほとんど単純な逆 2 乗則と同じになってしまうのである．

$$r \ll \lambda \quad \text{に対しては} \quad V_{ij}(r) \approx -\frac{G_0 M_i M_j}{r}(1+\alpha_5) = -\frac{G_1 M_i M_j}{r} \tag{4.105}$$

$$r \gg \lambda \quad \text{に対しては} \quad V_{ij}(r) \approx -\frac{G_0 M_i M_j}{r} \tag{4.106}$$

ここで，

$$G_1 = (1+\alpha_5)\, G_0 \tag{4.107}$$

である．

$r \to \infty$ に対しては湯川項は効かず，ニュートンポテンシャルの G_0 が実際上，重力現象を支配する定数となる．その意味で，

$$G_0 = G_\infty \tag{4.108}$$

と書くこともある．一方，もしキャベンディッシュの実験など，重力定数を直接測定する実験が行われる距離 r が λ よりずっと小さいとすると，はかられているのは，(4.107) 式で導入された G_1 であり，理論にはじめからはいっていた G_0 とは異なることになる．

いずれにせよ，(4.104) 式が逆 2 乗ポテンシャルと目だって違ったふるまいを示すのは $r \sim \lambda$ に限られる．このような事情を考慮して，物質間の力の距離依存性を精密に測定する試みが行われたが，やはり期待された「ずれ」は発見されなかった．そのことから，測定の精度で決まる α_5 の上限値が得られ，それも λ の関数としてまとめられている．それが図 4.5 である．この実験の解釈では，q_i にまつわる理論的不定性を避けることができる．

しかし一方，組成依存性実験の場合には，ある λ で得られた α_5 の上限値は，それより大きな λ を仮定した場合，一般にはある程度，さらに厳しい (小さい) 値になるという性質がある．なぜならば，ある距離 r で得られたポテンシャルの組成依存部分の上限値を δV とした場合，α_5 の上限値 $\bar{\alpha}_5$ は，

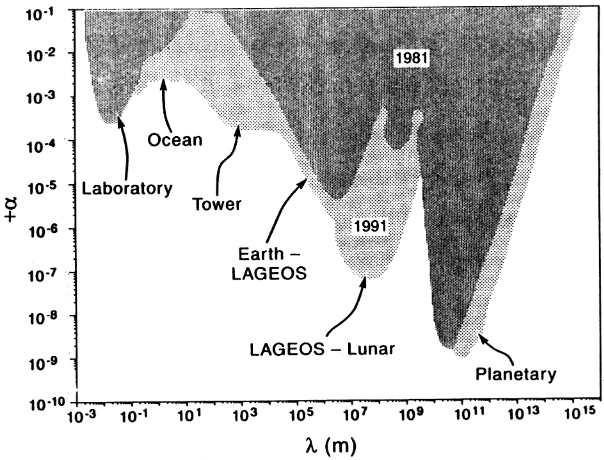


図 4.5 影をつけた部分はこれまでの組成非依存性実験から排除される領域を表す．縦軸の $+\alpha$ は，本文の α_5 と読み替える．[E.Fischbach and C.Talmadge, *Nature*, **356** 207,(1992).]

$$\bar{\alpha}_5 \frac{\mathrm{e}^{-\mu r}}{r} \sim \delta V \tag{4.109}$$

によって決まり，この値は $\mu = 0$ とおいた場合の $r\delta V$ より小さくなることはないからである．たとえば図 4.4 で，$\lambda = 10^5 \sim 10^6$ m あたりにおける上限値 $\sim 10^{-7}$ は，地球上で行われたエトベッシュの実験からの結果であるが，それは $\lambda \gtrsim 10^7$ m のすべての値に対して成り立っている．上限値がもっと小さくなるのは別の実験によってであるが，大きな λ に対して制限がゆるくなることはない．

これに反して組成非依存性実験からは，実験を行った距離 r とほぼ等しい値の λ に対してしか実験の「感度」はない．たとえば，図 4.5 の 10^{11} m あたりの小さな上限値 $\sim 10^{-9}$ は，太陽系の運動から得られたものだが，もし λ が太陽系の大きさより大きいとしたらほとんど何もわからなくなってしまう，ということを意味する．

もう1つ，理論によっては，WEPは成り立たせたままで，距離依存性だけがニュートン的なものからずれるという場合もありうることも注意しておこう．たとえば，B–D理論のように，スカラー場は物質のエネルギー・運動量テンソルの対角和のみに結合するが，一方スカラー場は(4.86)式の程度の質量をもつ，というような場合である．もしこのような場合，あるいはなんらかの理由で組成依存性が特に小さい場合があれば，組成非依存性実験によってのみスカラー場の痕跡を発見することができることになる．いずれにしても，これら2種類の実験は，独立なものと考えたほうがよい．

以上のような考えに立って，多くの実験が行われてきた．70年代から80年代の前半までは，逆2乗則が正しいかどうかを調べる実験が行われた．逆2乗則からのずれはないとする結果のほかに，他の原因では説明できない有意のずれがあるとする結果も報告された．そのような背景の中で，1986年には，等価原理の実験的「証明」として有名なエトベッシュの実験が，実はその破れ，すなわち組成依存性を示す実験となっていた，というE. Fischbachらの論文が現れた．彼らはその結果を，独自のベクトル場の理論に基づいて解釈をしようとしたのであったが，模型の特殊性を越えてその衝撃は物理学全体，さらには社会のもっと広い範囲に及んだ．「第5の力」という言葉は，このときの記者会見で生まれた．

多くの紆余曲折があったが，これまでのところ，新しい力の発見には至っていない．組成依存性実験，組成非依存性実験の両分野にわたって，のちになってその正当性が否定された実験がいくつもあった．しかし，いずれも単純なまちがいなどではなく，現代における精密実験の粋をつくしたすぐれた実験であった．多くの場合，世界的に行われた率直な議論や，他のグループによる再実験の結果，何が誤った結論の原因であったかが明らかになっている．しかし，真の原因が不明のままの実験もある．2章で触れた太陽の扁平率の実験や，重力波の実験的発見を最初に報告したJ. Weberの実験にも，あるいは共通した問題があるのかもしれない．

一方，理論的な観点からいえば，重力理論の基本的問題に新しい視点から

迫る道が開かれたことには，十分な意義が認められてよいであろう．特に，素粒子の質量の起源に関連し，スケール不変性の壊れ方についてのいろいろなアイディアを活用した理論は，少なくとも筆者には魅力あるものと思われる．実はこのほかにも，スカラー場やベクトル場から同様な現象を予見する理論的模型がいくつも提案されており，これからも何かの機会に再びとりあげられる可能性もある．

その意味では，これまで調べられたパラメータ領域を越えて，さらに実験が続けられることが望まれる．現在では，宇宙で行うさらに高精度の実験に期待が寄せられている．その計画には，初期のパイオニア的な実験の経験が生かされている．今後も，実験技術に新しい発展が起こるたびに，この分野にも新しい発展があるだろう．

この章の終わりに，このようなアプローチをとる場合，アインシュタイン理論に対してどういう態度をとるかについて，付言しておきたい．たとえば，組成依存性が発見されたとしよう．それは，アインシュタイン理論の破綻とみなされるのだろうか．

この答は,「アインシュタイン理論」とは何であると考えるかによって違ったものとなる．アインシュタイン理論は，「重力現象」のあらゆる面を説明する理論と考えるならば，等価原理を主張するアインシュタイン理論は完全には正しくない，という結論になる．しかし，重力現象には，時空幾何学以外の要因も含まれていて，一般相対論は，その一部に関する理論なのだ，という立場をとることも可能である．「以外」の要因が，有限到達距離力だというわけである．

一般相対論の意味では，有限到達距離力を生じさせる場は「物質」の一部である．他の，普通の意味の「素粒子」とは重力的な弱さの相互作用しかしないので，「重力」現象に寄与するのみだが，明らかに幾何学的なものではない．少なくとも 4 次元ではそうである．統一理論的な視点からみると，現実世界で重力の現象としてみられるのは，このように (4 次元) 幾何学的なものと，物質との共存だと考えても，けっして不自然ではないだろう．そうい

う意味で，一般相対論の理論そのものは尊重しつつ，重力現象の多様さを期待するのである．

その場合，WEP が成り立っているかどうかを調べる実験は，一般相対論の検証ではなく，この多様さを求め，統一理論への足がかりを探ろうとする試みと位置づけられるだろう．このことはまた，真に一般相対論を検証するにはどんな実験をすればよいか，という問題を提起する．一般相対論の検証とみなされてきた 3 つ (あるいは 4 つ) の実験は，厳密にいえばいずれも同じ意味で一般相対論「のみ」を確認する実験ではない．

一般相対論の 2 本の柱の 1 つとなっている等価原理についても，もう少し立ち入ってみておこう．一般相対論の成立過程からみると，等価原理は WEP から始まり，座標変換によって常に重力は消去できるという認識を経て，最終的には次の数学的な表現に至っている．すなわち，曲がったリーマン時空の接時空はミンコフスキー時空である，というのが EEP の究極的な表現であり，重力場の中での素粒子論を考える際には，不可欠の考えとなっている．有限到達距離重力の存在のために WEP がかりに破れていたとしても，必ずしも上に述べた意味の EEP を脅かすことにはならない．有限到達距離重力があるかないかとは独立に EEP を直接検証する実験を考えることは，さほど簡単なことではないことを注意して，この章の結びとしよう．

5章　宇　宙　論

Dickeが目指した目的の1つは，重力定数が宇宙時とともに変化することを許容する理論を作ることにあった．したがって宇宙論への応用は，当初から試みられた．その後，多くの研究があり，特に標準理論の最も大きな成功と考えられている軽元素合成をうまく説明できるかが，1つの焦点であった．しかしその結果は，やはりある種の制限を見出すということになっており，積極的に新しい成果を生んだとはいえなかったようである．ここでは，その物語の詳細にはいることはしない．その代わり，スカラー場がもっと特徴的な役割を果たしうる問題として，**宇宙定数問題**に関する主題をとりあげたい．

宇宙定数 Λ とは，アインシュタイン方程式を作る際の1つの不定性であり，これについては有名なエピソードが語り伝えられている．話は1922年にさかのぼるが，理論的には排除できないこの定数は，単純さを損なうこと，またそれまでに知られていた実験的事実と直接関連をもたないという理由で，Einsteinにとって好ましい存在ではなかった．しかし，一般相対論に基づいてA. Freedmanがはじめて導いた宇宙論の方程式によれば，宇宙は膨張あるいは収縮を続ける**動力学的な**ものだということであった．あれほど革新的であったEinsteinにとっても，これは認めがたい結論であった．我々のすべての存在の基礎である全宇宙は，やはりどっしりとして不変なものでなければ安心できなかったのだろう．そこでアインシュタイン方程式が**静的な**解をも

つように，「気が進まなかったが」宇宙項を導入したのだった．

ところが1929年になると，E. Hubbleが，当時の最大の望遠鏡を駆使した観測の結果，宇宙は現に膨張しつつあることを発見した．Einsteinが気に入らなかったFreedmanの結論は正しかったのである．これを聞いたEinsteinは，驚くほどの率直さで誤りを認めた.「宇宙定数を導入したのは，生涯で最大の誤ちであった」という有名なことばとともに，Λは永久に葬り去られたかにみえた．

しかし，それから半世紀以上たって，Λは亡霊のように徘徊し，現代の研究者を悩ますようになってきたのである．それには，2つの流れがある．第1は**統一理論**を模索する理論家たちの問題で，統一を目ざす，ほとんどどんな理論的模型においても，宇宙定数は不可避であり，しかもその大きさは$M_{\rm P}^4$のオーダーである．これは，観測的な上限に比べてほぼ120桁大きすぎる．理論と実験の不一致として，これほどはなはだしいものは史上類をみない．なんとかしなければならない問題だが，あまりに重大で，かえって誰も手を出さないという状況が続いている．

第2の流れは天文学的な観測からくるものである．これまでは，Freedman, Hubbleに始まる膨張宇宙論(big-bang cosmology)はきわめて高い精度で確かめられており，宇宙定数は，あるとしても小さな上限値以下であるとされてきた．ところが最近，ハッブル定数の観測精度が高まるにつれ，それから決まる宇宙年齢が，他の方法，たとえば球状星団の寿命より短く出るという奇妙な事態となってきた．この矛盾を解決する手段として，宇宙定数が新たに注目されている．ただし，それはこれまでの上限値を超えるものではなく，したがってやはり，上に述べた理論的な値より圧倒的に小さくなければならない．その意味で，理論的な困難は依然として残っている．完全にゼロであればまだしも，そうでなく，わずかばかりの微小な値として残すというのは，理論からいえばかえってやっかいな問題といえよう．

こんな状況の中で，スカラー場が大きな役割を果たす可能性がある．その概略を以下で説明したい．また，この理論につきまとう共形系の選び方の問

題にも，具体的な形で解答の糸口を示したい．

5.1　宇宙定数のある B–D 理論

(2.11) 式に宇宙定数を加えた，

$$\mathcal{L}=\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\xi\phi^2 R-\frac{1}{2}\epsilon g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi-\Lambda+L_{\mathrm{m}}\right) \tag{5.1}$$

を考える．統一理論の模型からすれば，だいたいにおいて $\Lambda\sim 1$ である．符号はどちらの可能性もあるが，もし $\Lambda<0$ ならば宇宙はきわめて短時間に収縮してつぶれてしまい，今みるような長い時間にわたっての発展はありえない．そこで $\Lambda>0$ の場合に限定することにする．注意しておきたいのは，たとえ $\Lambda=0$ の理論から出発しても，量子効果によって，ゼロでない Λ が出てしまうことである．実際，物質場の間の量子論的な相互作用の結果として**真空エネルギー**が生じ，それは (5.1) 式の中の Λ と同じ形となる．ただ大きさとしては 1 よりは小さいだろう．だいたいのところ素粒子の質量を m として，$\Lambda\sim m^4$ となる．$m\sim \mathrm{GeV}\sim 10^{-18}$ とすると，$\Lambda\sim 10^{-72}$ となるが，これでも観測的な上限値 $\sim 10^{-120}$ よりは 50 桁近く大きすぎる．しばらくは，Λ の大きさについて具体的なことはいわずに議論を進めたい．

物質場については特に詳細は問わず，普通のように，保存則 (2.15) 式

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}=0 \tag{5.2}$$

を満たす流体と考えることにする．運動方程式としては (2.13) 式に Λ の寄与を加えた，

$$2\varphi G_{\mu\nu}=T_{\mu\nu}+T^{\phi}_{\mu\nu}-g_{\mu\nu}\Lambda-2\left(g_{\mu\nu}\Box-\nabla_\mu\nabla_\nu\right)\varphi \tag{5.3}$$

および，同様に変更されたスカラー場の方程式

$$\Box\varphi=\zeta^2\left(T-4\Lambda\right) \tag{5.4}$$

である．前の (2.14) 式とは T の次に -4Λ がついている点で異なるが，(5.3) 式で Λ は $T_{\mu\nu}-g_{\mu\nu}\Lambda$ という組み合わせではいっていることに注目すれば，すぐに理解できるであろう．

さて宇宙論の第 1 近似としては，**一様等方な**フリードマン・ロバートソン・

ウォーカー (Freedman-Robertson-Walker) (FRW) 計量を考えるのが普通である．また，**空間的に平坦**な場合に限定してもさしつかえないと思われる．すなわち，

$$g_{00}=-1, \quad g_{ij}=a^2(t)\delta_{ij}, \quad g_{0i}=0 \tag{5.5}$$

とする．ここで $x^0=t$ は宇宙時，また $a(t)$ は宇宙の**スケール因子** (scale factor) である．またスカラー場としては，**空間的に一様**で，t のみの関数となる解が存在すると予想する．実際そういう解が存在することが示され，このためにスカラー場は，他のタイプの場とは違って，特有の宇宙論的役割を果たすことになるのである．

さらに物質については，さしあたり相対論的流体を考える．すなわち，

$$T_{00}=\rho(t), \quad T=0, \quad T_{0i}=0 \tag{5.6}$$

とおく．

これらを (5.2)～(5.4) 式に代入して整理すると，

$$6\varphi H^2=\epsilon\frac{1}{2}\dot{\phi}^2+\Lambda+\rho-6H\dot{\varphi} \tag{5.7}$$

$$\ddot{\varphi}+3H\dot{\varphi}=4\zeta^2\Lambda \tag{5.8}$$

$$\dot{\rho}+4H\rho=0 \tag{5.9}$$

を得る．ここで，

$$H=\frac{\dot{a}}{a} \tag{5.10}$$

で，ドットは t による微分を意味する．

この方程式には，以外に簡単な解が存在することがわかる．それは，実は静的な解である．実際，

$$H=0 \tag{5.11}$$

とおいてみよう．まず (5.9) 式から，

$$\rho=\text{定数} \tag{5.12}$$

が導かれる．

さらに (5.11) 式を (5.8) 式に代入すると，

$$\ddot{\varphi} = 4\zeta^2 \Lambda \tag{5.13}$$

となるが，その解は，

$$\varphi(t) = 2\zeta^2 \Lambda t^2 + \varphi_1 t + \varphi_0 \tag{5.14}$$

と表される．ここで，φ_1，φ_0 は定数である．$t \to \infty$ での漸近解は，これらのパラメータを無視したものである．これにより ($\varphi = (\xi/2)\phi^2$ を思い出して)，

$$\phi \approx \sqrt{4\Lambda\zeta^2\xi^{-1}}t = \sqrt{\frac{4\Lambda}{6\xi + \epsilon}}\,t \tag{5.15}$$

を得る．

これまでの結果をアインシュタイン方程式 (5.7) 式に代入すると，(5.12) 式の定数が決まり，

$$\rho = -3\Lambda \frac{2\xi + \epsilon}{6\xi + \epsilon} \tag{5.16}$$

となることがわかる．

もし $\epsilon = 1$ ならば，$\xi > 0$ の範囲で $\rho < 0$ となり，物理的に無意味となる．したがって，どうしても，

$$\epsilon = -1 \tag{5.17}$$

と選ばなければならない．これが，2 章の出発点で ((2.11) 式の箇所を参照)，みかけ上のゴーストを許すことにした理由である．こうすれば，

$$\frac{1}{6} < \xi < \frac{1}{2}, \qquad \text{または} \quad 2 < \xi^{-1} < 6 \tag{5.18}$$

であれば，$\rho > 0$ となりうる．しかし (2.8) 式によれば，これは，

$$\frac{1}{2} < \omega < \frac{3}{2} \tag{5.19}$$

を意味し，太陽系実験から得られた制限 $\omega \gtrsim 10^3$ (2.93) 式を満たさない．また (5.18) 式あるいは (5.19) 式は，

$$\zeta > \frac{1}{2} \tag{5.20}$$

を意味する．

しかし，この制限は，σ が無質量だと仮定しての結論である．もし量子効果によって σ が質量をもち，それに相当する到達距離が太陽系の大きさより適当に小さければ，制限はもっと弱くなるだろう．いずれにしても，目下のと

ころはその詳細な議論にははいらず，明白な自己矛盾に陥らないかぎり，理論的追究を続けてみることにする．

(5.18) 式が満たされているかぎり，$\zeta^2 > 0$ であり，σ は正のエネルギーをもつ正常な場であるので，$\epsilon = -1$ であっても物理的に困難はない．実際，統一理論から期待されるスカラー場には，この意味のゴーストの例となっているものがある．たとえば，$N \geqq 6$ 次元のカルーザ・クライン理論で，$N-2$ 次元が閉じた空間にコンパクト化された場合，この空間の大きさを表す変数は，4 次元でゴーストの符号をもつスカラー場としてふるまう．詳細については付録 I を参照されたい．とにかく，$\epsilon = -1$ は，けっして致命的ではないことを強調しておこう．

ここで見出された解は，放射優勢の時期に静的な宇宙を表し，現実的ではない．もっとも，現在の宇宙に関して，直接観測にかかるものではない．しかし，軽元素合成の理論が驚くほどうまくいっていて，膨張宇宙に関する標準理論を支える重要な成果となっているが，その核心は $\sim t^{1/2}$ に従う膨張とそれに伴う温度の低下にある．静的宇宙では全く問題にならない．ただ，今は J 系で議論を展開しており，これは現実の物理的状況と対応させる場合，さらに慎重な考慮が必要となり，この点はあとで議論する．

その前に問題となるのは，(5.11)，(5.15) 式および (5.16) 式で表される解は「安定」かどうかである．数値的な方法で得られた解をみると，今求めた解は**アトラクター**となっていることがわかる．すなわち，任意の初期条件から出発した場合，はじめは $a(t)$ は変化し，したがって $H(t)$ はゼロではない．しかし時とともに $H(t)$ は急速にゼロに収束していく．その様子を示した例が図 5.1 である．

数値解を求める場合，(5.7)～(5.9) 式の中で，H は微分を伴わない．したがって H を代数的に消去することができる．その結果，解のふるまいは，$\varphi, \dot{\varphi}, \rho$ の 3 変数についての**相空間** (phase space) の中での運動として表現される．図 5.2 は，$\dot{\phi}^2 = \dot{\varphi}^2/(2\xi\varphi)$ と ρ による 2 次元断面を示している．

(5.15)，(5.16) 式は，この 3 次元空間の中の 1 本の曲線を表しており，図 5.2

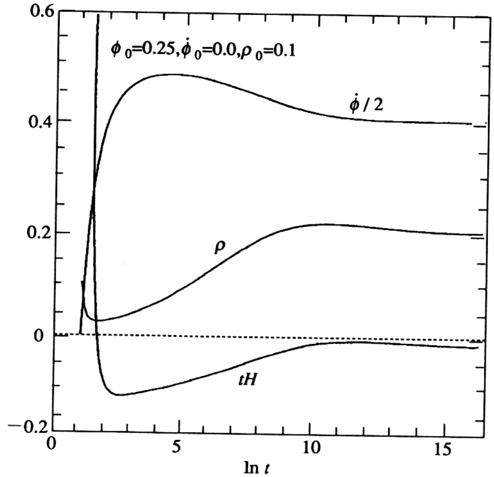


図 5.1 (5.7)〜(5.9) 式の解がアトラクター解に近づいて行くことを示す一例.

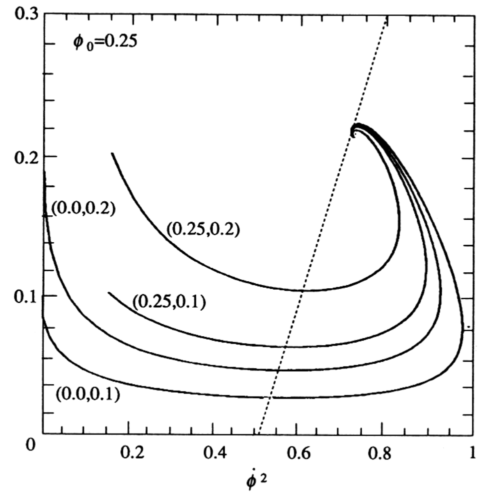


図 5.2 相空間の断面である $\dot{\phi}^2$-ρ 平面の中での解のふるまい. 4 つの曲線は, 括弧の中で示された ϕ, ρ の初期値 ($t = 10^{10}$ での値) に対応. それぞれ左の方から出発し, 時間の経過と共に移動し, 最終的に共通の一点に巻きついてゆく. 点線は $H = 0$ を表す.

の中では1点を貫いている．図に示した4つの解は，$\dot{\varphi}$ と ρ の初期値において異なっているが，上に述べた曲線に巻きついていく様子が読みとれる．これがアトラクターの意味である．

これについては，1922年の Einstein の議論も思い出される．実はスカラー場なしで，マイナスの宇宙定数がある場合，任意の解はいったんは静的な解に近づくが，まもなくそれから離れていく．詳細は付録Jに示すが，図5.3はその様子を近似的に示したもので，今の場合とは違って，**不安定な解**とよばれている．

今の場合，なぜ解が静的になるかについては，次の節で1つの「物理的な」説明を与える．しかしその前に，宇宙論的な**インフレーション**との関連について説明しておこう．(5.7) 式と (5.8) 式には，一時的にせよ $H = \text{const.} > 0$ の解が存在しうる．実際，宇宙のきわめて初期には，

$$\Lambda \gg \rho \tag{5.21}$$

が満たされている時期があると考えてよいだろう．その場合，(5.7) 式で ρ を無視し，さらに (5.8) 式で H がほぼ定数だとすると，これは速度に比例する抵抗をもつ質点の運動方程式で，その初期状態は任意に設定できる．議論を簡単にするために，

$$\varphi(0) = b > 0, \quad \dot{\varphi} \approx 0 \tag{5.22}$$

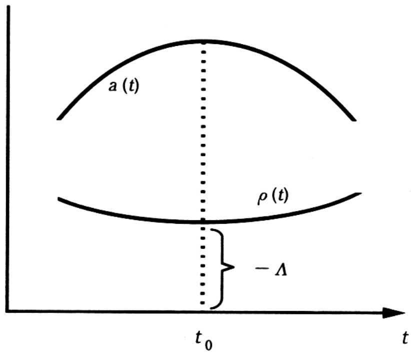


図 5.3 アインシュタインの「静的」宇宙の時間発展．

とおき，この値がある期間，極端には変化しないものと考えてみる．そうすると，$\dot{\phi} \approx 0$ ともみなしてよいだろうから，けっきょく (5.7) 式は，

$$6bH^2 \approx \Lambda, \quad \text{すなわち} \quad H \approx \sqrt{\frac{\Lambda}{6b}} \tag{5.23}$$

となる．これからは，

$$a(t) \sim \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{6b}}\, t\right) \tag{5.24}$$

が導かれる．ただし $H < 0$ のほうの解は無視した．

これによれば，宇宙のスケール関数が**指数関数的に増大**する．これが，いわゆるインフレーションで，その存在は現代の宇宙論において不可欠の役割を担っている．このようなふるまいは，正の宇宙定数が優勢であれば常に起こりうるのだが，もし Λ が本当に定数ならば，インフレーションは終わることがなく，指数関数的なふるまいはいつまでも続く．実際には，急激な膨張はやがて終息し，もっと穏やかな，「べき乗」で表される変化に移行することが期待される．そういう移行を実現する「しかけ」がどんなものかについて議論があったが，1 つの解答がスカラー場の役割である．

実際，今調べた模型では，解は漸近的に静的宇宙に近づく．(5.7) 式に即して説明すると，Λ によって表される正のエネルギーは，スカラー場の寄与である負のエネルギー $-\dot{\phi}^2/2$ によってしだいに減らされていき，やがて完全に打ち消されることになる．こうして，この理論では，Λ は初期にはインフレーションを引き起こすという役割を果たすが，漸近的には「無害化」されるというシナリオが実現している．最終状態が非現実的であるとはいえ，重要な示唆となっている．

5.2 E系での理論

同じ理論を今度はE系で調べてみよう．(5.1)式に共形変換(3.6)，(3.40)式を施す．Λ 以外の部分は(3.34)式で得られている．残りは(3.8)式によって，

$$-\sqrt{-g}\Lambda = -\sqrt{-g_*}\Omega^{-4}\Lambda \tag{5.25}$$

となる．これを合わせて，

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g_*}\left(\frac{1}{2}R_* - \frac{1}{2}g_*^{\mu\nu}\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma - \Lambda e^{-4\zeta\sigma} + L_{*\mathrm{m}}\right) \tag{5.26}$$

となる．これがこの節の出発点である．注目すべきこととして，Λ には $e^{-4\zeta\sigma}$ がかかることになった．つまり，この共形系では，Λ の項は σ のポテンシャルとして働くのである．

さらに，このポテンシャルは，E系における物質との相互作用としても得られる．これはJ系で，物質場の相互作用の結果現れる真空エネルギーが，宇宙定数を生ずる事情に対応している．たとえば(3.64)式に現れる，

$$-L' = m\overline{\psi}_*\psi_* e^{-\zeta\sigma} \tag{5.27}$$

を σ と ψ の相互作用項とし，これから σ の自己相互作用を計算すると，(5.26)式のポテンシャル項が得られるのである．

いずれにせよ，もとのJ系でみると宇宙項はスカラー場にはなんの関係もないが，E系ではこの項が σ に力を及ぼす．E系では σ と $g_{\mu\nu}$ とは対角化されているので，紛らわしい点はないのだが，J系では同じ作用が混合相互作用を通じて間接的に伝わる．したがって，運動エネルギー項でない，普通の意味の相互作用項のみをみていると，誤解が生ずるおそれもある．

こうして生じた σ のポテンシャルは**指数関数型**で，σ は一方的な下り坂を，∞ に向かっていつまでも進み続けるのである(図5.4)．進むに従って傾斜もゆるくなり，したがって進む「速度」も遅くなる．

こうして σ のエネルギー(運動エネルギー + ポテンシャルエネルギー)はしだいに減少する．またこれが Λ に直接関係しているのだから，けっきょく，宇宙定数の効果は，時間とともにどこまでも減少することになる．これこそが，前の節でみた，宇宙定数の無害化の「からくり」なのである．しかも，こ

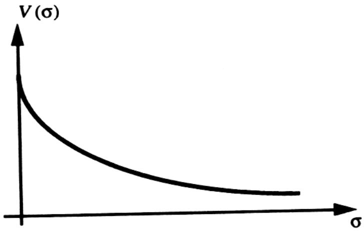


図 5.4 指数関数型ポテンシャル.

の節の方法では，Λ から生ずる効果は，宇宙の発展とともに t^{-2} のように小さくなり，前に述べた 120 桁の小ささが自然に理解できる道を与えてくれる．そのような点をもっと具体的にみるため，E 系での宇宙論的な方程式を解くことにしよう．

その前に，(5.26) 式から導かれるアインシュタイン方程式とスカラー場の運動方程式を書いておく．

$$G_{*\mu\nu} = T^{(\phi)}_{*\mu\nu} + T_{*\mu\nu} \tag{5.28}$$

$$\Box_* \sigma + 4\zeta \Lambda \mathrm{e}^{-4\zeta\sigma} = \zeta T_* \tag{5.29}$$

(5.28) 式で $T^{(\phi)}_{*\mu\nu}$ には，ポテンシャル項として $\Lambda \mathrm{e}^{-4\zeta\sigma}$ を含ませてある．また (5.29) 式の右辺は，(3.54) 式からきている．

次に FRW 計量 (5.5) 式を考える．

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\mathrm{d}\vec{x}^2 \tag{5.30}$$

共形変換を (3.2) 式の形で書くと，

$$\mathrm{d}s_*^2 = \Omega^2 \mathrm{d}s^2 = -\Omega^2 \mathrm{d}t^2 + \Omega^2 a^2(t)\mathrm{d}\vec{x}^2 \tag{5.31}$$

これを改めて，

$$\mathrm{d}s_*^2 = -\mathrm{d}t_*^2 + a_*^2(t_*)\mathrm{d}\vec{x}^2 \tag{5.32}$$

と書き，これによって E 系における宇宙時 t_*，およびスケール関数 $a_*(t_*)$ を

定義する．すなわち，

$$\mathrm{d}t_* = \Omega \mathrm{d}t, \quad \text{および} \quad a_* = \Omega a \tag{5.33}$$

共形変換そのものは座標変換を含まないが，(5.33) 式の第 1 式は，E 系に移ったのち，これに従って一般座標変換を行うことを意味する．$g_{*00} = -1$ こそがE 系における「宇宙時」を定義する条件なのである．

また，第 2 式を導く際，$\mathrm{d}\vec{x}$ のほうを変換すべきではないかという疑問が出るかもしれない．しかし，$d\vec{x}$ は**共動座標** (comoving coordinate) である．空間的に平坦な場合は必ずしもはっきりしないが，たとえば空間的に閉じた空間の場合，共動座標はすべて，有限な範囲に限定された「角度」にほかならず，それに対してスケールを変えるような変換を行うことはできない．このような注意のもとで，E 系でも，J 系におけるのと同じ「形」の FRW 計量を用いることができる．

こうして FRW 計量が定まったので，それを用いて (5.28)，(5.29) 式を書き直す．また，やはり σ は t_* のみの関数とする．以後しばらくの間 $*$ を書かないことにするが，E 系での方程式であることを常に了解しておく．

アインシュタイン方程式は，

$$3H^2 = \rho_\sigma + \rho \tag{5.34}$$

ただし，

$$\rho_\sigma = \frac{1}{2}\dot{\sigma}^2 + V(\sigma) \tag{5.35}$$

$$V(\sigma) = \Lambda \mathrm{e}^{-4\zeta\sigma} \tag{5.36}$$

である．また前と同様，放射優勢の宇宙を考えて $T = 0$ とする．したがって σ の方程式は，

$$\ddot{\sigma} + 3H\dot{\sigma} + V'(\sigma) = 0 \tag{5.37}$$

となる．

この方程式に対しては，次の解があることがわかる．

$$a(t) = t^{1/2} \tag{5.38}$$

$$\sigma(t) = \bar{\sigma} + \frac{1}{2}\zeta^{-1}\ln t \tag{5.39}$$

$$\rho(t) = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\zeta^{-2}\right)t^{-2} \tag{5.40}$$

ここで $\bar{\sigma}$ は,

$$\Lambda \mathrm{e}^{-4\zeta\bar{\sigma}} = \frac{1}{16}\zeta^{-2} \tag{5.41}$$

を満たすように決められる.

実際に (5.38) 式以下の式を (5.34), (5.37) 式に代入し, これらが満たされていることを確かめることができる. その際,

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2}\zeta^{-1}t^{-1}, \qquad \mathrm{e}^{-4\zeta\sigma} = \mathrm{e}^{-4\zeta\bar{\sigma}}t^{-2} \tag{5.42}$$

などが得られ, これらより,

$$\rho_\sigma = \frac{3}{16}\zeta^{-2}t^{-2} \tag{5.43}$$

となることもわかる.

ところで, この量は明らかに Λ から出てきたものであり, ある意味でE系における「実効的な」宇宙定数といってもよい.

$$\Lambda_{\mathrm{eff}} = \rho_\sigma \tag{5.44}$$

さらに, σ は他の物質とは $\sqrt{G_0}$ で特徴づけられる強さの相互作用しかしない. その意味で重力的な場であるが, ある意味では「真空のエネルギー」とよんでもよい面がある. それが $\sim t^{-2}$ のようにして減少していくので, **減衰する宇宙定数** (decaying cosmological constant) とよばれることもある. この ρ_σ はまた, 暗黒物質の役割を果たす.

その係数は, いずれにしても1のオーダーである. さらに, 宇宙の現在の年齢はほぼ 10^{10} 年であるが, これを今の単位系で表すと, $\sim 10^{60}$ となることがわかる. そうすると t^{-2} はほぼ 10^{-120} である. すなわち, このシナリオによると, 宇宙定数はプランク時間ごろから減衰して, 現在では120桁小さくなったのだ, ということになる. はじめに述べた120桁の差というのは, こうしてきわめて自然な解釈に導かれたのである.

こうして，宇宙定数問題の「前半分」は理解できるようになったといってよいだろう．しかし「後半」，すなわち上限ではなく，ゼロでない宇宙定数が存在する兆候があるという点になると，この「説明」は無力である．その点については別の文献に譲ることとしたい．ただ t^{-2} というのは，エネルギー密度として，いわゆる**臨界密度**の大きさにほかならないことも強調しておこう．厳密には臨界密度は，

$$\rho_{\rm cr} = 3H^2 \tag{5.45}$$

によって定義されるもので，$a(t) \sim t^{\alpha}$ ならば，

$$\rho_{\rm cr} = 3\alpha^2 t^{-2} \tag{5.46}$$

と表されることを思い出しておこう．上の議論では，$\Lambda_{\rm eff}$ も物質のエネルギー密度と同じようにふるまい，宇宙がとにかく「べき乗」の膨張にはいれば，必然的に $\sim t^{-2}$ のように減少することを示したのである．

もう 1 つ，(5.40) 式から，$\rho > 0$ であるための条件が求められる．それは，

$$\xi^{-1} > 2 \tag{5.47}$$

となり，J 系で得られた条件 (5.18) 式の 1 つと一致する．

さらに，J 系の解との比較を進めてみよう．ここからは，再び $*$ 記号を復活させて，両系での量を区別する．(5.15) 式によれば，

$$\phi(t) \sim t \tag{5.48}$$

である．これを (3.21) 式，すなわち，

$$\Omega \sim \phi \tag{5.49}$$

と組み合わせ，その結果を (5.33) 式の第 1 式に代入すると，

$$\mathrm{d}t_* \sim t\mathrm{d}t \tag{5.50}$$

これを積分して，

$$t_* \sim t^2 \tag{5.51}$$

を得る．

ところで (5.39) 式は，

$$\phi = \phi_0 t_*^{1/2} \tag{5.52}$$

を意味する．ここで，$\phi_0 = e^{\zeta\bar{\sigma}}$ である．ここで (5.51) 式を用いると $\phi \sim t$ となり，(5.48) 式を再現する．

さらに (5.33) 式の第 2 式に，J 系における $a = \text{const.}$ を代入すると，

$$a_* \sim \Omega \sim t \sim t_*^{1/2} \tag{5.53}$$

となり，(5.38) 式と一致する．最後の式に移る際 (5.51) 式を使った．

こうして 2 つの共形系での解の同等性が確かめられたが，どちらの系で記述するかによって，宇宙のふるまいは全く異なってみえる．J 系では膨張はなく，E 系では普通の放射優勢のように膨張する．どちらが正しい系なのだろうか．

5.3 共形系の選び方

共形変換とは，そもそも「単位」，あるいは測定の「基準」を局所的に変更する変換であった．特に宇宙論の場合についていえば，時間をはかる単位が，時間とともに変わるような時計を用いる状況を考えていることを意味する．そんな時計があるだろうか，といぶかられるかもしれないが，さほど奇妙なことではない．

人類の誕生以来，いちばん長く広く使われてきた時間の単位は，太陽が出てから沈むまでの時間間隔であった．あるいはそれをもっと細かく刻むために日時計が用いられた．しかし，そういう時間間隔は季節とともに変化することも，早くから知られていたにちがいない．しかし，日の出から日没までの時間が，夏は長く冬は短いというとき，明らかにもう 1 つ別の時計を念頭においていることは容易にわかるだろう．それはどんな時計だろうか．人間の体内時計，もっと簡単にいえば，生活のリズムもそんな別種の時計の 1 つだろう．もう少し定量的，「客観的」にしようと思えば，たとえば砂時計や水時計を使えばよいだろう．

ただ，純粋に形式論理的な立場からいえば，人間の心臓の鼓動や砂時計は，

夏の昼間はゆっくりと，冬の昼間はせわしく動くのだ，という人がいてもよかったかもしれない．昼の長さを時間の基準にするという立場からは，そういう主張を排除することはできない．しかし，もっと広い立場に立てば，日照時間の長さの変化は，太陽のまわりを地球がどんなふうにめぐるかに関係しており，砂時計を基準にしたほうが，そういう運動についてもさらに広く正確な知識を深めるには便利だ，ということもわかってくる．

このような例は，身のまわりにいくらでもあるが，もっと精密な物理学や天文学の領域で，現在も続けられている研究にもおおいに関係がある．数十年前までは，地球の自転が時間の基準であった．その場合，単に昼夜の時間ではなく，すなわち太陽に対してではなく，遠くの恒星の位置に対する地球の 1 回転をもって 24 時間と定めていた時期があった．しかし，地球の自転には月の引力に伴う潮汐などの問題があり，実はあまり完全な周期的運動とはいえない面もあることがわかってきた．そういう議論をするときにも，何か別の時間単位が必要なわけだが，その際使われたのは，太陽のまわりをめぐる地球の公転周期であった．

しかし，公転運動といえども，他の惑星の影響など，複雑な要因を受けて変化しているかもしれない．もっと，単純な原理で動く時計はないものだろうか．こうした考えから，現在では**原子時計**が使われるようになっている．これについては 3 章でも述べたが，原子が放出したり吸収したりする光，あるいは電波の振動数を基準として利用する時計である．このような振動数は，外界の種々の影響を全く受けない．たとえば，普通のクォーツ時計は，決まった大きさの石英片の基準振動数を単位として時間をはかっているが，周囲の温度が変わると大きさが変わり，したがって基準振動数が変化してしまう．マクロな物体を使うと，この種の影響を取り除くことはきわめて困難だが，ミクロな原子の時間基準は，そういう影響を受けない点が強みである．

しかし実際には，長時間にわたってミクロな時計を安定に維持することには，別の困難が伴う．そういう技術的な点も考慮して，現在では何種類かの原子時計が実用化されている．最もよく知られているのは，^{137}Cs の超微細構

造を利用するもので，そのエネルギー差は (3.3) 式で与えられるリュードベリ定数に，さらに，

$$\alpha^2 g_{\mathrm{p}} \frac{m_e}{2m_{\mathrm{p}}} \tag{5.54}$$

を掛けたものによって表される．ここで m_{p} は陽子の質量，g_{p} は陽子の磁気回転比 (gyromagnetic ratio) とよばれる定数である．

これらの詳細に立ち入ることはしないが，要するに，ミクロな振動数の基準となるエネルギー差は，本質的に，

$$\alpha^m \mathcal{M} c^2 \qquad (m = 1, 2, \cdots) \tag{5.55}$$

によって与えられていることに注目しよう．ここで，$\mathcal{M}$ は何かの素粒子の質量，またはその組み合わせであることが重要である．素電荷 e に相当する強い相互作用の結合定数なども考えることができ，その結果，「核時計」といったものも考えられるが，今は，そこまで話題を広げることはしない．なお，さらに基本的な定数である c, $\hbar$ は，一応，完全な定数であるとしておこう．

このようなミクロな時計を基準として，今では地球の公転にもわずかながらではあるが，不規則な変化があることも見いだされている．また，宇宙の時間も実はミクロな時計ではかられていることも認識しておこう．

たとえば，最も重要なパラメータである宇宙の現在の年齢は，**ハッブル定数** H_0 の値から決められる．

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1} \tag{5.56}$$

一方，H_0 は**ハッブルの法則**

$$z = \frac{l}{c} H_0 \tag{5.57}$$

から決定される．ここで，l は遠方の天体までの距離，z はその赤方偏移で，あるスペクトル線の振動数 ν と，それを地上で測ったときの値 ν_0 とから，

$$\frac{\nu}{\nu_0} = 1 + z \tag{5.58}$$

と与えられる．l のほうは全くマクロな天文学的な測定によって決まる距離だが，一方でスペクトル線の波長，つまり上で議論したミクロな時間基準が不可欠の役割を果たしているのである．

以上のことを念頭において，さて我々の宇宙論模型を検討してみよう．J 系

の理論の場合，素粒子の質量 m は時間には依存しない定数であった．またこの理論には，微細構造定数 α はとり入れられていない．実はカルーザ・クライン理論や，その他の統一理論の模型の多くでは，素粒子の電荷もスカラー場に依存するようになっている．Jordan がはじめてスカラー・テンソル理論を提唱したときにもそうなっており，Dicke はこの点を批判して今の形の理論を作った．その意味で B–D 理論はあまり完全なものとは考えないほうがよいが，今のところは，α の時間変化は無視することにする．そうすると (5.55) 式は定数であり，これはミクロな時計を使っているという状況に対応している．

次に E 系での理論を考えよう．物質のラグランジアンは (3.63) 式で与えられているが，質量項は，

$$m(t_*) = m_0 \mathrm{e}^{-\zeta\sigma} \tag{5.59}$$

である．ここで (5.39) 式を使うと，

$$m \sim t_*^{-1/2} \tag{5.60}$$

のように，時間とともに変化することがわかる．前と同じ理由で，α は変化しないと仮定すると，けっきょく，時間の単位 $\tau \sim \mathcal{M}^{-1}$ が，

$$\tau \sim t_*^{1/2} \tag{5.61}$$

のように変化していることになる．

時間の基準そのものが変化しているとしたら，その時間 t_* は，普通我々が使っているミクロな時間ではない．そもそも，τ を基準にした時間ではかるかぎり，基準そのものの変化が認識できるはずがない．基準の変化を知るには，別の時計が必要である．そういう時間 $\tilde{t}$ はどういう時間だろうか．ある時刻の近傍を考えれば，$\tau(t_*)$ を単位にして測った時間の経過 $\mathrm{d}\tilde{t}$ は，

$$\mathrm{d}\tilde{t} = \frac{\mathrm{d}t_*}{\tau(t_*)} \tag{5.62}$$

によって与えられるだろう．(5.61) 式によれば，

$$\mathrm{d}\tilde{t} \sim t_*^{-1/2}\mathrm{d}t_* \tag{5.63}$$

したがって，

$$\tilde{t} \sim t_*^{1/2} \tag{5.64}$$

を得る．

これを (5.51) 式と比べると，$\tilde{t} \sim t$ であることがわかる．すなわち，原子時計ではかる時間を使う共形系は，J 系にほかならない．この意味で，我々が今，対象としている宇宙論は，J 系で記述されていると結論される．この J 系での理論によると，B–D 理論に宇宙定数を加えた理論は，たとえば放射優勢時期における軽元素合成の説明を完全にフイにしてしまうことは，すでに述べたとおりである．

膨張の仕方が 2 つの系で異なることも，直感的な理由で理解可能である．E 系では (5.38) 式の示すように $a_* \sim t_*^{1/2}$ である．一方特殊相対論が正しければ，長さの基準は時間の基準と同じはずであり，(5.61) 式によれば，長さの基準はけっきょく $\sim t_*^{1/2}$ のように変化する．これはスケール関数 a_* の変化の仕方と全く同じである．すなわち，こういうものさしではかれば宇宙は膨張していないようにみえる．これが J 系における結論 $a = \mathrm{const.}$ の理由である．

ところで，軽元素合成の時期，つまり「最初の 3 分間」のころ，原子時計というような「装置」は存在せず，したがって上の議論は現実性をもたないのではないか，という疑問が出るかもしれない．しかし，問題の本質は，我々がそういう「装置」を使って観測するかどうかではない．軽元素合成を議論する際の基本となっている量子力学の理論は，粒子の質量や電荷はすべて完全な定数であるとして構成されている．もし質量などが時間の関数であるならば，量子力学もそれにマッチするように書かれていなければならない．それは不可能ではないだろうが，現在の解析とはかけ離れたものである．

もう 1 つ，宇宙定数を単純に B–D 理論につけ加えるのが正しくないのではないか，という疑問があってもよい．しかし，宇宙定数は，スカラー場と物質の量子力学的な相互作用からも出てくる．それは，次元解析からいっても，質量の 4 乗に比例するだろう．m が定数である J 系でそれを行えば，やはり定数の宇宙定数が出てくるのは避けられない．詳細は述べないが，同じ結論は，E 系で同じ種類の計算をしても得られることがわかる．このような考察

から，B–D 理論は現実的な宇宙論を導く理論とはみなせない．しかし，この点で，4 章で議論した「ディラトン理論」は違った結論に導くことがわかる．

B–D 理論とディラトン理論との違いは，物質場の質量項だけである．ディラトン理論は J 系で物質場の質量がないので，物理的現象との対応をこの系でつけることはできない．一方，E 系で量子効果を含める前の段階では，質量だけあって，スカラー場との結合はない．量子効果をとり入れないのは現実的ではないが，議論の一段階として，まずこの場合を考えてみよう．

σ が物質と直接の結合をもたなくても，最小結合を通じて重力とは相互作用をしており，したがって宇宙論的な影響は残っている．しかも放射優勢の宇宙を考えるかぎり，物質場の質量は宇宙論的な方程式にははいってこない．実際，宇宙のふるまいは (5.38)～(5.40) 式によって与えられる．B–D 理論の場合との唯一の違いは，この E 系が現実に我々が住んでいる系だということである．なぜならば m はこの系で定数であり，他の相互作用の結合定数がやはり定数であると仮定できる範囲で，時間の基準もやはり定数だからである．この意味で宇宙は，$a_* \sim t_*^{1/2}$ に従って膨張し，軽元素合成のシナリオに関して合格となりうる．宇宙の距離を測る基礎となるミクロなものさしも変化することはなく，膨張のしかたが別のようにみえることもない．第 5 の力のタイプの実験で観測されることもなく，この意味で**見えないスカラー場** (invisible scalar field) は有望な行き方である．また，E 系では重力定数 G も完全な定数であり，$\dot{G}/G$ の観測的上限が非常に小さいこととも矛盾しない．

ただし，量子効果を無視することを完全に正当化することはできない．たとえば (4.74) 式によって与えられるような物質結合が生じた場合，やはり質量の時間依存性が出てくる．質量の真に定数部分と合わせ，(5.39) 式を使うと，

$$m(t_*) = m_0 + g_\sigma \frac{1}{2}\zeta^{-1} \ln t_* \tag{5.65}$$

となる．今とっている方針に従えば，さらに適当な共形変換を行って，この σ 依存性を消してしまうべきだろう．そうすれば σ は再び「見えなく」なる．同時に今度は G の時間変化が出てくる．

もし，α も σ に依存するのであれば，たとえば $\alpha^4 m$ という積が σ によらないように変換しなくてはならない．そうすれば，再び σ は「見える」ようになるかもしれない．このあたりは，模型をさらに精密にしないとこれ以上進むことはできない．しかし，いずれにしても，純粋なJ系やE系「以外の」共形系が現実的なものとなるだろう．そうなると，質量や微細構造定数の時間変化を実験的に探ることが，ますます必要になってくる．

最後に，それではなぜJ系の理論から出発したのか，という疑問について考えておこう．はじめにも述べたように，統一理論の理論的模型には，非最小結合をもつものが多い．その意味でJ系の理論は，まさに「理論的」なものである．それはまた時間や距離の基準について，1つの選択をしていることになっている．

そもそも，1つの理論を定式化するにはラグランジアンを書かねばならず，それは共形系を決めることによってのみ可能である．一方，我々が観測したり，理論的な解析をしたりする場合，必ず何か具体的な時間や距離の基準を用いており，それは必ずしもJ系で自動的に選ばれているそれとは一致しない．この不一致を埋めるために，なんらかの共形変換を行うことが必要になるのである．

ほとんどの理論は共形変換に対して不変ではない．そのために，共形系の選び方によって，物理現象は異なってみえる．宇宙が膨張しているかどうかでさえ，共形系に依存する概念である．ちょうど古典力学で，いろいろな加速度系では異なった慣性力が生じ，現象が違ってみえるのと同じことといってよいだろう．

その場合，特に慣性系が理論的に簡単な構造をもっていたが，同じような事情が共形系の選択でもありうる．1つの例がゲージ不変性である．これまでの議論ではほとんど触れなかったが，ゲージ理論は，4次元で共形変換に対して特に簡単な性質を示す．しかし多くの統一理論は，本来，多次元時空の理論である．そこで N 次元での可換ゲージ理論 (マクスウェル理論) を考えてみよう．

$$\mathcal{L}_{\rm em} = -\frac{1}{4}\sqrt{-g}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \tag{5.66}$$

ここで,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{5.67}$$

である. (5.66) 式はゲージ変換

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda \tag{5.68}$$

に対して不変である.

共形変換 (3.6) 式を行うと (5.66) 式は,

$$\mathcal{L}_{\rm em} = -\frac{1}{4}\sqrt{-g_*}g_*^{\mu\rho}g_*^{\nu\sigma}\Omega^{4-N}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \tag{5.69}$$

となる. A_μ の運動エネルギー項を正準的にするために,

$$A_\mu = \Omega^{\nu-2}A_{*\mu} \tag{5.70}$$

とおいて, 新しい場 $A_{*\mu}$ を導入する. そうすると (5.67) 式の代わりに,

$$F_{*\mu\nu} = \partial_\mu A_{*\nu} - \partial_\nu A_{*\mu} + (\nu-2)(f_\mu A_{*\nu} - f_\nu A_{*\mu}) \tag{5.71}$$

となる. ここで, $f_\mu \equiv \partial_\mu \ln\Omega$ で, また, $\nu = N/2$ と書いた. また, それに応じて (5.68) 式は,

$$A_{*\mu} \longrightarrow A_{*\mu} + \Omega^{2-\nu}\partial_\mu\Lambda \tag{5.72}$$

となり, $\nu \neq 2$ の場合, 単なるグラディエントを付加するのとは違った変換になる. これは理論的な単純さをそこない, 見通しを悪くする. もとのJ系での理論が有利であることを示す1例である.

5.4 今後の課題

以上, スカラー場がある場合の宇宙論がどうなるか, その一端を示したが, 今のままではやはり現実とは遠い. 特に, もし宇宙定数が小さいが, しかしゼロでないという観測結果が確かめられるとすると, ここで議論したタイプの単純な理論では不十分なことは明らかである. なぜならば, 我々の $\Lambda_{\rm eff}$ は t^{-2} のように減少するが, 今述べた観測結果は, ほんとうに定数の Λ が存在することを主張しているのだからである.

しかし, 宇宙定数問題の少なくとも「前半」については, スカラー場に決定

的な役割を期待することができたと考えられる．J系にせよE系にせよ，量子効果の最も重要な部分をとり入れて，インフレーションののち，べき乗で膨張する宇宙を導く「模型」を作ることができたのである．さらに現実的な模型とするためには，たとえばスカラー場の数をふやすなど，いろいろな試みが必要だろう．特に共形系の選び方が問題となる．それについては，ここで紹介した議論が役にたつだろう．

そのほか，将来の発展として議論されるだろう問題点を，いくつか列挙してみよう．

非最小結合をもっと一般的な形にするか？

これまでの議論では，非最小結合として最も簡単な形 $\sim \phi^2$ が仮定された．しかし各種の統一理論からは，もっと複雑な関数も示唆されている．そこで，単純な形でない非最小結合を仮定しようという提案もある．その場合，一般にはその関数の極大が，E系でのポテンシャルの極小を与えることがわかる．したがって，上で考えた指数関数ポテンシャルの場合とは異なり，スカラー場はどこかの極小に捕えられ，時間的に静止してしまうこともありうる．その後は，素粒子の質量の時間的変化もないので，共形系の選択も問題ではなくなるだろう．この場合，スカラー場は質量をもつが，4章で議論したような小さな値にはならず，第5の力のように，巨視的な距離で効果をみせることはないだろう．

一方，そのポテンシャルの極小値 $V_{\min}$ は，新たな宇宙定数となる．観測結果と矛盾しないためには，この極小値が 10^{-120} よりも小さくなっていなければならない．これは，何かのパラメータを120桁の精度で**微調整**することを意味し，とうてい受け入れがたいであろう．この章で議論した模型では，微調整ではなく，宇宙の寿命が十分長く，$t \sim 10^{60}$ に対して $t^{-2} \sim 10^{-120}$ となることを利用したのであった．

また，非最小結合の形が $\sim \phi^2$ の場合に限って係数 ξ が無次元となり，したがってスケール不変性が成り立つことが重要かもしれない．この事情は，時

空の次元数が何であっても正しいことを注意しておこう.

しかし，もっとゆるやかな立場から，非最小結合の一般的な形の結果を，最近の多くの観測結果によって調べようとする試みもなされている．特に，太陽系実験よりも高精度の結果を与えつつある2重星パルサーの解析が，今後は重要となりそうである.

結合定数は時間とともに変わるか？

統一理論の理論的模型からは，スカラー場は物質場の多くに直接結合する．特にゲージ場の運動エネルギー項にも直接結合し，その結果，素粒子間のいろいろな相互作用の結合定数もスカラー場に依存することになる．もしスカラー場が，ポテンシャルの停留点にとどまることなく，動き続けるとしたら，結合定数は宇宙時のべきのように変化する可能性が高い．たとえば微細構造定数についても，$\alpha \sim t^\eta$ のようになるとしてみよう．ただし，η はだいたいにおいて1のオーダーだろう．そうすると，

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \sim \eta t^{-1} \sim t^{-1} \sim 10^{-10}\ \mathrm{yr}^{-1} \tag{5.73}$$

となることが期待される.

しかしこれについては，クエーサーのスペクトル分析から，

$$\left|\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right| \lesssim 10^{-15}\ \mathrm{yr}^{-1} \tag{5.74}$$

という結果が報告されている．これは単純な予想 (5.73) 式に比べて5桁も小さい．これは，スカラー場が動き続けるというシナリオを根本的に否定するものだろうか.

これについては，指数関数的なポテンシャルの場合 (5.15) 式や (5.52) 式を与える漸近解に達する前に，スカラー場がある期間の間，ほとんど停止するようなふるまいを示す可能性が知られている．1例を図 5.5 に示す.

このようなことが起こるのは，方程式の非線形性のためだが，緩和発振 (relaxation oscillation) として多くの現象に現れるものと共通の原因をもっている．この図のように，現在がこの「冬眠期間」にあるとすれば，質量，結合定数だけでなく，重力定数もほんとうの定数として観測されることになる.

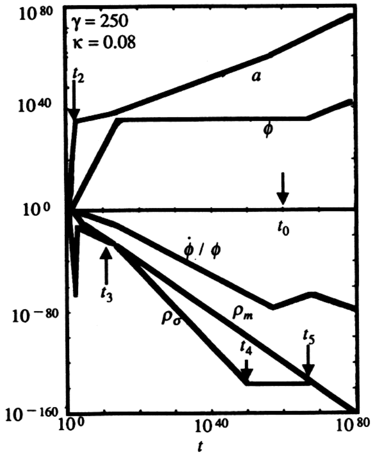


図 5.5 スカラー場が一時的に停止する解の例．ϕ が平坦な部分が「冬眠期間」を表す．図の $\rho_{\rm m}$ は，本文の ρ を表す．E 系での解であることを表す $*$ は省略してある．[Y.Fujii, M.Omote and T.Nishioka, *Progr. Theoret. Phys.*, **92** 521,(1994).]

解のこのような性質をさらに利用する試みもなされている．

統一理論はプランク質量 $M_{\rm P} \sim 10^{18}$ GeV というきわめて高く，人工的には，おそらくけっして到達しえないエネルギー領域での物理であるが，それに対する「小さなのぞき窓」が，このような，いわばきわめて低いエネルギー現象の中にあるのかもしれない．第 5 の力も，この意味でやはり重要な研究分野とみなされている．

スカラー場の真の起源は？

スカラー場の起源として，これまでは超弦理論など，多次元時空での理論から出てくる場を予想してきたが，全く別種の起源がありうることも指摘されている．たとえば，我々の時空は，実は 2 枚の時空が貼り合わせられたようなもので，この 2 枚をつなぐ「接続場」の役割を果たす場から，非最小結合をもつスカラー場が導かれる，という理論が提唱されている．さらに細か

い点にまで研究が進められることを期待している.

問題はさらにあるだろう. それとともに, スカラー場の活躍の新しい場面もまた見つかってくるのではないだろうか. そんな夢を期待して, 終わりとしたい.

付　録　A　非最小結合がある場合の重力場方程式

アインシュタイン・ヒルベルト型でなく，非最小結合がある場合，アインシュタイン方程式にかわる場の方程式を導く．考えるラグランジアンは，$\varphi(x)$ をスカラー関数として，

$$\mathcal{L}_{\rm nm} = \sqrt{-g}\varphi R \tag{A.1}$$

である．

まずアインシュタイン方程式の場合にやったように，R を 2 階微分を含む部分 R_1 とそれ以外の部分に分ける．

$$R = R_1 + R_2 \tag{A.2}$$

ここで，

$$R_1 = g^{\mu\nu}\left(\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma_\mu\right) \tag{A.3}$$

$$R_2 = \Gamma_\lambda C^\lambda + \frac{1}{2}\Gamma^\lambda_{\rho\sigma}\partial_\lambda g^{\rho\sigma} \tag{A.4}$$

である．ただし，

$$\Gamma_\mu = \Gamma^\rho_{\rho\mu} = \frac{\partial_\mu\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\partial_\mu g_{\rho\sigma} \tag{A.5}$$

$$C^\lambda = g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = -\partial_\sigma g^{\lambda\sigma} - g^{\lambda\nu}\Gamma_\nu \tag{A.6}$$

とおいた．また (A.4) 式の最後の項を得るに際しては，

$$g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda_{\rho\mu} = g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu}g^{\lambda\sigma}\Gamma_{\sigma,\rho\mu} \tag{A.7}$$

において $g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu}g^{\lambda\sigma}$ は μ, σ について対称であることを使う．これは $\Gamma^\rho_{\lambda\nu}$ が λ, ν について対称であることから導かれる．この対称性により，(A.7) 式において $\Gamma_{\sigma,\rho\mu} \equiv g_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda_{\rho\mu}$ の $\mu\,\sigma$ について対称な部分，すなわち，

$$\frac{1}{2}\partial_\rho g_{\sigma\mu}$$

のみが寄与するのである．

さて，$\sqrt{-g}R_1$ の部分について，

$$\sqrt{-g}R_1 = \partial_\lambda\left(\sqrt{-g}D^\lambda\right) - 2\sqrt{-g}R_2 \tag{A.8}$$

なることを示す．ここで，

$$D^\lambda = C^\lambda - g^{\lambda\mu}\Gamma_\mu \tag{A.9}$$

である．

これを確かめるには (A.3) 式において部分積分を行い，

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}R_1 = \partial_\lambda\left[\sqrt{-g}\left(C^\lambda - g^{\mu\lambda}\Gamma_\mu\right)\right] \\ -\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right) + \Gamma_\mu\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right)\end{aligned} \tag{A.10}$$

とする．この第 2 行の第 1 項で (A.5) 式を使って，

$$\begin{aligned}\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right) &= \left(\partial_\lambda\sqrt{-g}\right)g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\partial_\lambda g^{\mu\nu} \\ &= \sqrt{-g}\left(\Gamma_\lambda g^{\mu\nu} + \partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)\end{aligned} \tag{A.11}$$

したがって，

$$-\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right) = \sqrt{-g}\left(-\Gamma_\lambda C^\lambda - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right) \tag{A.12}$$

また (A.10) 式の第 2 行第 2 項では，(A.6) 式を使い，

$$\begin{aligned}\partial_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right) &= \left(\partial_\nu\sqrt{-g}\right)g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\partial_\nu g^{\mu\nu} \\ &= \sqrt{-g}\left(\Gamma_\nu g^{\mu\nu} + \partial_\nu g^{\mu\nu}\right) = -\sqrt{-g}C^\mu\end{aligned} \tag{A.13}$$

となる．(A.12) 式と (A.13) 式を合わせて，項を整理すると (A.8) 式が得られる．

(A.8) 式を (A.1) 式に代入すると，

$$\mathcal{L}_{\rm nm} = \varphi\left(\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}D^\lambda\right) - \sqrt{-g}R_2\right) \tag{A.14}$$

となるが，ここで部分積分すると，

$$\mathcal{L}_{\rm nm} = -\sqrt{-g}\left(D^\lambda\partial_\lambda\varphi + \varphi R_2\right) \tag{A.15}$$

を得る．

これを $g_{\rho\sigma}$ について変分するのだが，R_2 の部分については一般相対論の教科書にあるとおりで，

$$\frac{\delta\left(\sqrt{-g}R_2\right)}{\delta g_{\rho\sigma}} = \sqrt{-g}G^{\rho\sigma} \tag{A.16}$$

である．そこで (A.15) 式の第 1 項を調べる．

$$\frac{\delta\left(\sqrt{-g}D^{\lambda}\partial_{\lambda}\varphi\right)}{\delta g_{\rho\sigma}} = \partial_{\lambda}\varphi\frac{\partial\left(\sqrt{-g}D^{\lambda}\right)}{\partial g_{\rho\sigma}} - \partial_{\mu}\left(\partial_{\lambda}\varphi\frac{\partial\left(\sqrt{-g}D^{\lambda}\right)}{\partial\partial_{\mu}g_{\rho\sigma}}\right) \tag{A.17}$$

以降，局所ローレンツ系で計算する．このとき D^{λ} は $g_{\mu\nu}$ の 1 階微分を含むから，

$$\frac{\partial\left(\sqrt{-g}D^{\lambda}\right)}{\partial g_{\rho\sigma}} = 0 \tag{A.18}$$

である．次に，

$$-\partial_{\mu}\left(\partial_{\lambda}\varphi\frac{\partial\left(\sqrt{-g}D^{\lambda}\right)}{\partial\partial_{\mu}g_{\rho\sigma}}\right) = -\sqrt{-g}\partial_{\mu}\left(\partial_{\lambda}\varphi\frac{\partial D^{\lambda}}{\partial\partial_{\mu}g_{\rho\sigma}}\right) \tag{A.19}$$

である．

ここで，(A.6) 式および (A.5) 式により，

$$\frac{\partial C^{\lambda}}{\partial\partial_{\mu}g_{\rho\sigma}} = g^{\rho\lambda}g^{\sigma\mu} - \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}g^{\mu\lambda} \tag{A.20}$$

ただし，ρ, σ については対称化されているものとする．同様に，

$$\frac{\partial}{\partial\partial_{\mu}g_{\rho\sigma}}\left(-g^{\lambda\nu}\Gamma_{\nu}\right) = -\frac{1}{2}g^{\lambda\mu}g^{\rho\sigma} \tag{A.21}$$

これらを使って，

$$\frac{\partial D^{\lambda}}{\partial\partial_{\mu}g_{\rho\sigma}} = g^{\rho\lambda}g^{\sigma\mu} - g^{\rho\sigma}g^{\mu\lambda} \tag{A.22}$$

を得，したがって (A.17) 式は，

$$\frac{\delta\left(\sqrt{-g}D^{\lambda}\partial_{\lambda}\varphi\right)}{\delta g_{\rho\sigma}} = -\sqrt{-g}\partial_{\mu}\left[\partial_{\lambda}\varphi\left(g^{\rho\lambda}g^{\sigma\mu} - g^{\rho\sigma}g^{\mu\lambda}\right)\right]$$
$$= -\sqrt{-g}\left(\partial^{\rho}\partial^{\sigma} - g^{\rho\sigma}\Box\right)\varphi \qquad \text{(A.23)}$$

となる．ここで，$\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}$ は，ミンコフスキー時空におけるダランベルシャンである．

局所ローレンツ系で得られたこの結果を曲がった時空に拡張すれば，

$$-\sqrt{-g}\left(\nabla^{\rho}\nabla^{\sigma} - g^{\rho\sigma}\Box\right)\varphi \qquad \text{(A.24)}$$

となるはずである．ここでの $\Box$ はもちろん曲がった時空のもので，

$$\Box = g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} \qquad \text{(A.25)}$$

である．

付　録　B　物質のエネルギー保存則

物質の (共変的) エネルギー保存則の導き方の詳細を示す．また，ラグランジアンに，スカラー場と物質の結合がある場合も含めて議論する．そのような項は，物質のラグランジアン $L_{\rm m}$ の中に含めてもよいが，式の表現の都合上，もう 1 つのラグランジアンとして，

$$L' = -J\phi \tag{B.1}$$

を導入する．ここで J はスカラー場の源である．これに伴ってアインシュタイン方程式の右辺に，

$$T'_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}J\phi \tag{B.2}$$

が加わる．また，

$$T' = -4J\phi \tag{B.3}$$

である．この変更のために，スカラー場の運動方程式 (2.20) 式は，

$$\xi\phi R + \epsilon\Box\phi - J = 0 \tag{B.4}$$

これに ϕ をかけた式 (2.22) 式は，

$$2\varphi R + \epsilon\phi\Box\phi - \phi J = 0 \tag{B.5}$$

となる．さらに (2.24) 式に相当するのは，

$$-2\varphi R = T + T' - \epsilon\left(\partial\phi\right)^2 - 6\Box\varphi \tag{B.6}$$

である．これらの式から R を含んだ項を消去すると，

$$\Box\varphi = \zeta^2\left(T - 3\phi J\right) \tag{B.7}$$

となり，これが (2.27) 式の代わりとなる．ここで ζ^2 は前と同じく (2.28) 式または (2.29) 式で与えられる．(2.30) 式も少し変更されて，

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = -\nabla_\mu T^{\mu\nu}_\phi - \nabla_\mu T'^{\mu\nu} + 2\left[G^{\mu\nu}\partial_\mu + \left[\nabla^\nu, \Box\right]\right]\varphi \tag{B.8}$$

となる．

この右辺で，まず第 1 項に注目する．(2.19) 式を用いて，

$$\nabla_\mu T_\phi^{\mu\nu} = \epsilon\left(\Box\phi\nabla^\nu\phi + \nabla^\mu\phi\left(\nabla_\mu\nabla^\nu\phi\right) - \frac{1}{2}\nabla^\nu\left(\nabla^\mu\phi\nabla_\mu\phi\right)\right) \tag{B.9}$$

第 1 項に (B.4) 式を用いると，はじめの 2 項は，

$$(J - \xi\phi R)\,\nabla^\nu\phi + \epsilon\left(\nabla^\mu\nabla^\nu\phi\right)\partial_\mu\phi \tag{B.10}$$

となる．この第 1 項で ϵ がなくなっていることに注意．ついで (B.9) 式の第 3 項は，

$$-\,\epsilon\left(\nabla^\nu\nabla^\mu\phi\right)\partial_\mu\phi \tag{B.11}$$

となることがわかる．(B.11) 式と (B.10) 式の第 2 項では，∇^μ と ∇^ν の順序が違うだけである．ところが，これらはスカラー関数 ϕ にかかっているので，順序の違いは問題にならない．したがって，これらの項は互いに打ち消し合ってしまい，けっきょく，

$$\nabla_\mu T_\phi^{\mu\nu} = J\nabla^\nu\phi - R\nabla^\nu\varphi \tag{B.12}$$

を得る．ここで (2.8) 式

$$\varphi = \frac{1}{2}\xi\phi^2$$

を使った．

次に (B.8) 式の第 2 項については，

$$\nabla_\mu T'^{\mu\nu} = -\nabla^\nu(J\phi) \tag{B.13}$$

である．

最後に (B.8) 式の第 3 項だが，その中で，

$$\begin{aligned}[\nabla^\nu, \Box]\,\varphi &= g^{\rho\sigma}\left(\nabla^\nu\nabla_\rho\nabla_\sigma - \nabla_\rho\nabla^\nu\nabla_\sigma\right)\varphi \\ &= g^{\rho\sigma}\left[\nabla^\nu, \nabla_\rho\right]\nabla_\sigma\varphi \\ &= -g^{\rho\sigma}R^{\lambda\nu}_{\sigma,\rho}\partial_\lambda\varphi = -R^{\lambda\nu}\partial_\lambda\varphi\end{aligned} \tag{B.14}$$

という計算をする．第 1 行から第 2 行への変形では，φ にかかる場合，∇^ν と ∇_σ は可換であることを利用した．また，ベクトル場 V_μ について成り立つ

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\,V_\kappa = -R^\lambda_{\kappa,\mu\nu}V_\lambda$$

を使った．

(B.12)，(B.13)，(B.14) 式を (B.8) 式に代入すると，$G_{\mu\nu}$，R を含む項は互いに打ち消し合ってなくなり，

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \phi\,\nabla^\nu J \tag{B.15}$$

が得られる．$J = 0$ のときにかぎり，

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{B.16}$$

となり，(2.15) 式が得られる．

付　録　C　エディントンパラメータ

純粋なアインシュタイン理論からのずれを表すエディントンパラメータは，シュワルツシルトの解を**等方座標** (isotropic coordinate) で表しておいて定義される．まず，最も普通の表示で，シュワルツシルトの時空の 3 次元部分を書こう．

$$\mathrm{d}s_3^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - a/r} + r^2 \mathrm{d}\Omega^2 \tag{C.1}$$

これを，

$$\mathrm{d}s_3^2 = f^2(r) \left(\mathrm{d}r'^2 + r'^2 \mathrm{d}\Omega^2 \right) \tag{C.2}$$

の形にするような r' を求める．いい換えると，

$$\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - a/r}} = f(r) \mathrm{d}r' \tag{C.3}$$

$$r = f(r) r' \tag{C.4}$$

を満たすように r' と関数 $f(r)$ を決めたい．

(C.4) 式を r' について微分すると，

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r'} = f' \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r'} r' + f$$

となる．ここで $\mathrm{d}r/\mathrm{d}r'$ に (C.3) 式からの代入をして整理すると，

$$r \frac{f'}{f} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - a/r}}$$

を得る．あるいは，

$$(\ln f)' = \frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 - ar}} \tag{C.5}$$

とも書くことができる．これを積分すると，

$$f = \frac{2r}{r - (a/2) + \sqrt{r^2 - ar}} \tag{C.6}$$

となる．分子に現れる2は，もともと積分定数だったのだが，$r \to \infty$ で $r' \to r$ という条件を満たすように決めたものである．すなわち，(C.4) 式は，この条件が $f \to 1$ となるべきことを示しているが，(C.6) 式の形はちょうどそれを満たしている．

さて (C.6) 式と (C.4) 式を組み合わせると，

$$r' = \frac{1}{2}\left(r - \frac{a}{2} + \sqrt{r^2 - ar}\right) \tag{C.7}$$

これに対する逆の関係を求めると，

$$r = r'\left(1 + \frac{a}{4r'}\right)^2 \tag{C.8}$$

さらに (C.4) 式を使って，

$$f = \left(1 + \frac{a}{4r'}\right)^2 \tag{C.9}$$

これを (C.2) 式の中で使うと，

$$\mathrm{d}s_3^2 = \left(1 + \frac{a}{4r'}\right)^4 \mathrm{d}\vec{x'}^2 \tag{C.10}$$

を得る．

4 次元線素における g_{00} については，

$$-g_{00} = 1 - \frac{a}{r} = 1 - \frac{a}{r'}\frac{1}{\left(1 + \dfrac{a}{4r'}\right)^2}$$

この右辺を計算すると，

$$-g_{00} = \frac{\left(1 - \dfrac{a}{4r'}\right)^2}{\left(1 + \dfrac{a}{4r'}\right)^2} \tag{C.11}$$

となる．(C.10) 式を次のような形にしておくと便利である．

$$g_{ij}=\delta_{ij}\left(1+\frac{a}{4r'}\right)^4 \tag{C.12}$$

ここまでは純粋の一般相対論の範囲であったが，次にこれからのずれを，a/r' の展開の形でとり入れる．まず，

$$\left(1+\frac{a}{4r'}\right)^4\approx 1+\frac{a}{r'}+\mathcal{O}\left(\frac{a^2}{r'^2}\right)$$
$$\to 1+\gamma\frac{a}{r'}+\mathcal{O}\left(\frac{a^2}{r'^2}\right) \tag{C.13}$$

1次の項まで残して，

$$g_{ij}=\left(1+\gamma\frac{a}{r'}\right)\delta_{ij} \tag{C.14}$$

と書く．もちろん $\gamma=1$ で一般相対論に戻る．

同様に g_{00} も展開でき，一般相対論からのずれは次のように行う．

$$-g_{00}\approx 1-\frac{a}{r'}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{r'^2} \tag{C.15}$$
$$\to 1-\frac{a}{r'}+\frac{\beta}{2}\frac{a^2}{r'^2} \tag{C.16}$$

最後の式の第2項にも係数 α がはいってよさそうだが，それは a に吸収されてしまうので，このままでよい．

けっきょく，等方座標で書けば，球対称静的な解は a^2/r^2 までの近似で (C.16) 式と (C.14) 式と書くことができる．ただし，g_{ij} については a^2/r^2 の項は落としてある．それは太陽系実験の範囲では，さらに高次の項にしか効かないからである．

このままでもよいのだが，実際の計算は等方座標ではなく，もとの座標で行われることが多い．そのために (C.14) 式と (C.16) 式をもとの座標で書き直した式がよく用いられる．それを導いておこう．

まず (C.14) 式は，一般相対論の式で $a\to\gamma a$ という置き換えを行ったものにすぎない．したがって (C.8) 式の中で同じ置き換えをし，さらに a/r' で展開すると，

$$r = r'\left(1+\gamma\frac{a}{4r'}\right)^2 \approx r' + \frac{\gamma}{2}a \tag{C.17}$$

となり，これより，

$$r' \approx r - \frac{\gamma}{2}a = r'\left(1-\frac{\gamma}{2}\frac{a}{r}\right) \tag{C.18}$$

を得る．

これを (C.1) 式に代入して，

$$g_{rr} \approx 1+\gamma\frac{a}{r} \tag{C.19}$$

を得る．前と同様，2 次の項は落としてある．次に (C.16) 式に代入すると，

$$-g_{00} \approx 1-\frac{a}{r}\left(1+\frac{\gamma}{2}\frac{a}{r}\right)+\frac{\beta}{2}\frac{a^2}{r^2} \tag{C.20}$$

$$= 1-\frac{a}{r}+\frac{\beta-\gamma}{2}\frac{a^2}{r^2} \tag{C.21}$$

となる．(C.19) 式と (C.21) 式が求める結果である．

付　録　D　スカラー曲率の共形変換

時空の次元数が N の場合について，スカラー曲率 R が共形変換に対してどう変わるかを調べる．計算は単純だが，長たらしい．しかし，簡便な方法もある．全体を一応眺めたのち，最後の部分を見てほしい．

(3.9) 式に従って，

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left(\partial_\nu g_{\rho\lambda} + \partial_\lambda g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\nu\lambda}\right) \tag{D.1}$$

と与えられているクリストッフェル記号を用いて，

$$R = g^{\mu\nu}\left(\partial_\lambda \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma_\mu - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\right) + \Gamma_\sigma C^\sigma \tag{D.2}$$

これは，(A.3)，(A.4) 式と同じもので，もちろん，

$$\Gamma_\mu = \Gamma^{\rho}_{\mu\rho}, \qquad C^\sigma = g^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \tag{D.3}$$

である．

$$g_{\mu\nu} = \Omega^{-2} g_{*\mu\nu}, \qquad g^{\mu\nu} = \Omega^2 g_*^{\mu\nu} \tag{D.4}$$

に対して，

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} = \Omega^{-2}\left(\partial_\mu g_{*\nu\lambda} - 2f_\mu g_{*\nu\lambda}\right) \tag{D.5}$$

となることは，すでに (3.13) 式で述べた．ここで，

$$f_\mu = \frac{\partial_\mu \Omega}{\Omega} = \partial_\mu \ln \Omega \equiv \partial_\mu f \tag{D.6}$$

である．(D.5) 式を (D.1) 式に代入することにより，

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} &= \frac{1}{2}g_*^{\mu\rho}\left(\partial_\nu g_{*\rho\lambda} - 2f_\nu g_{*\rho\lambda} + \partial_\lambda g_{*\rho\nu} - 2f_\lambda g_{*\rho\nu} - \partial_\rho g_{*\nu\lambda} + 2f_\rho g_{*\nu\lambda}\right) \\
&= \Gamma^{\mu}_{*\nu\lambda} - g_*^{\mu\rho}\left(f_\nu g_{*\rho\lambda} + f_\lambda g_{*\rho\nu} - f_\rho g_{*\nu\lambda}\right) \\
&= \Gamma^{\mu}_{*\nu\lambda} - \delta^{\mu}_{\lambda} f_\nu - \delta^{\mu}_{\nu} f_\lambda + f_*^{\mu} g_{*\nu\lambda}
\end{aligned} \tag{D.7}$$

を得る．これが (3.10) 式である．

これよりまず，

$$\Gamma_\mu = \Gamma_{*\mu} - N f_\mu \tag{D.8}$$

が得られる．ここで次元数 N は，

$$g_*^{\mu\nu} g_{*\mu\nu} = \delta_\mu^\mu = N \tag{D.9}$$

のようにして現れた．同様にして，

$$C^\sigma = \Omega^2 \left[C_*^\sigma + (N-2) f_*^\sigma\right] \tag{D.10}$$

も導かれる．

(D.7) 式を微分して，

$$\partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \partial_\lambda \Gamma_{*\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu f_\mu - \partial_\mu f_\nu + g_{*\mu\nu}\left(\partial_\lambda f_*^\lambda\right) + \left(\partial_\lambda g_{*\mu\nu}\right) f_*^\lambda \tag{D.11}$$

を得る．これに $g^{\mu\nu}$ を掛けるが，その際 (A.5) 式から，

$$g_*^{\mu\nu}\left(\partial_\lambda g_{*\mu\nu}\right) = 2\Gamma_{*\lambda} \tag{D.12}$$

となることを使って，

$$g^{\mu\nu}\partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Omega^2 \left[g_*^{\mu\nu}\left(\partial_\lambda \Gamma_{*\mu\nu}^\lambda\right) - 2 g_*^{\mu\nu}\left(\partial_\mu f_\nu\right) + N\left(\partial_\mu f_*^\mu\right) + 2\Gamma_{*\lambda} f_*^\lambda\right] \tag{D.13}$$

が得られる．

(D.8) 式からは同様にして，

$$g^{\mu\nu}\partial_\nu \Gamma_\mu = \Omega^2 \left(g_*^{\mu\nu}\partial_\nu \Gamma_{*\mu} - N g_*^{\mu\nu}\partial_\nu f_\mu\right) \tag{D.14}$$

を得る．

ついで (D.2) 式の中で $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ の微分を含まない項に移る．

$$-g^{\mu\nu}\Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma = -\Omega^2 \left[g_*^{\mu\nu}\Gamma_{*\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{*\mu\lambda}^\sigma - 2C_*^\lambda f_\lambda - (N-2) f_*^\lambda f_\lambda\right] \tag{D.15}$$

$$\Gamma_\mu C^\mu = \Omega^2 \left[\Gamma_{*\mu} C_*^\mu + (N-2)\Gamma_{*\mu} f_*^\mu - N C_*^\mu f_\mu - N(N-2) f_\mu f_*^\mu\right] \tag{D.16}$$

これらを総合して，

$$R = \Omega^2 R_* + \Omega^2 \left[N\partial_\mu f_*^\mu + (N-2) g_*^{\mu\nu}\partial_\nu f_\mu + N\Gamma_{*\mu} f_*^\mu - (N-2) C_*^\mu f_\mu \right.$$
$$\left. -(N-1)(N-2) f_\mu f_*^\mu\right] \tag{D.17}$$

となる．右辺第 1 項以外の部分を ΔR と書くことにしよう．その中で，

$$\partial_\nu f_\mu = \partial_\nu \left(g_{*\mu\lambda} f_*^\lambda\right) = g_{*\mu\lambda}\partial_\nu f_*^\lambda + \left(\partial_\nu g_{*\mu\lambda}\right) f_*^\lambda \tag{D.18}$$

と変形しておいて，

$$g_*^{\mu\nu}\partial_\nu f_\mu = \partial_\lambda f_*^\lambda + \left(C_*^\mu g_{*\mu\lambda} + \Gamma_{*\lambda}\right) f_*^\lambda \tag{D.19}$$

と書く．ここで，

$$g_*^{\mu\nu}\left(\partial_\nu g_{*\mu\lambda}\right) = -g_{*\mu\lambda}\left(\partial_\nu g_*^{\nu\mu}\right)$$
$$= g_{*\mu\lambda}\left(C_*^\mu + g_*^{\mu\nu}\Gamma_{*\nu}\right) = g_{*\mu\lambda}C_*^\mu + \Gamma_{*\lambda} \tag{D.20}$$

となることを使った．さらに (D.20) 式の途中で (A.6) 式を使った．

(D.19) 式により，

$$\Delta R = \Omega^2\left[2(N-1)\left(\partial_\mu + \Gamma_{*\mu}\right)f_*^\mu - (N-1)(N-2)f_\mu f_*^\mu\right] \tag{D.21}$$

となる．ところで，

$$\Box_* f = \frac{1}{\sqrt{-g_*}}\left(\sqrt{-g_*}f_*^\mu\right) = \partial_\mu f_*^\mu + \frac{\partial_\mu\sqrt{-g_*}}{\sqrt{-g_*}}f_*^\mu \tag{D.22}$$

と書くことができるが，(A.5) 式によって，

$$\Box_* f = \left(\partial_\mu + \Gamma_{*\mu}\right)f_*^\mu \tag{D.23}$$

となることがわかる．$f = \ln\Omega$ として (D.23) 式を (D.21) 式で使うと，

$$\Delta R = \Omega^2\left[2(N-1)\Box_* f - (N-1)(N-2)g_*^{\mu\nu}f_\mu f_\nu\right] \tag{D.24}$$

を得る．$N=4$ とおけば (3.14)，(4.30) 式となる．

さて簡便法というのは，E 系において局所ローレンツ系に移って計算することである．つまり，$g_{*\mu\nu}$ の微分や $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ をゼロとおいてしまう (ただしその微分は残す)．そうすると (D.13) 式では，右辺の最後の項が落ちる．(D.14) 式はそのままだが，(D.15)，(D.16) 式では，それぞれ最後の $f_*^\lambda f_\lambda$ の項のみが残る．その結果，(D.17) 式の ΔR の項において，$\Gamma_{*\mu}$ と C_*^μ の項がなくなり，計算が大分楽になる．(D.18) 式においても第 2 項はなく，(D.21) 式でも $\Gamma_{*\mu}$ が落ちる．さらに (D.23) 式も同様で，けっきょく，同じ結果 (D.24) 式がずっと簡単に得られる．もちろん，式のテンソル性から，その答の正しさが保証されている．

付　録　E　共形不変な理論

$$\mathcal{L}_{\rm BDc} = \sqrt{-g}\left(\frac{1}{12}\phi^2 R + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right) \tag{E.1}$$

を考える．共形変換として，

$$g_{\mu\nu} = \Omega^{-2}g'_{\mu\nu} \tag{E.2}$$

$$\phi = \Omega\phi' \tag{E.3}$$

を行う．以前と違うのは，ϕ にも変換 (E.3) 式を行うこと，また (3.20) 式または (3.21) 式のような要求をおかないことである．

(E.3) 式から，

$$\partial_\mu\phi = \Omega\left[\partial_\mu\phi' + \phi'\partial_\mu f\right] \tag{E.4}$$

となる．また，やはり (E.3) 式から，

$$f = \ln\phi - \ln\phi' \tag{E.5}$$

である．

これらを (E.1) 式に代入すると，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm BDc} = \sqrt{-g'}\Biggl(&\frac{1}{12}\phi'^2\left[R' + 6\Box' f - 6g'^{\mu\nu}f_\mu f_\nu\right] \\ &+\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi' + \phi'\partial_\mu f\right)\left(\partial_\nu\phi' + \phi'\partial_\nu f\right)\Biggr)\end{aligned} \tag{E.6}$$

となる．これらの各項を計算するのだが，たとえば，

$$\sqrt{-g'}\frac{1}{2}\phi'^2\Box' f = -\sqrt{-g'}\frac{1}{2}\phi'\partial_\mu\phi' g'^{\mu\nu}\left(\phi^{-1}\partial_\nu\phi - \phi'^{-1}\partial_\nu\phi'\right) \tag{E.7}$$

となる．ここで，部分積分を行った．また，

$$f_\mu f_\nu = \phi^{-2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - 2\phi^{-1}\phi'^{-1}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi' + \phi'^{-2}\partial_\mu\phi'\partial_\nu\phi' \tag{E.8}$$

などともなる．これらをすべて (E.6) 式に代入すると，$\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$ および $\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi'$ の形の項は全部互いに打ち消し合ってしまい，最後には ϕ' の運動エネルギー

の形の項しか残らない．こうして，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{BDc}} = \sqrt{-g'}\left(\frac{1}{12}\phi'^2 R' + \frac{1}{2} g'^{\mu\nu} \partial_\mu \phi' \partial_\nu \phi'\right) \tag{E.9}$$

となることがわかる．(E.1) 式と比べると，あらゆる場所に ′ をつけただけで，形は全く同じである．この意味で，理論は変換 (E.2)，(E.3) 式に対して不変である．これは共変不変な理論の例であるが，これが実際にどれだけの有効性を示すかは明らかではない．この場合，スカラー場は力学的自由度をもたず，ベクトル場におけるゲージ関数と似た働きをしている．

付　録　F　フェルミオン場の共形不変性

質量がゼロのフェルミオン理論は，トーションがない場合には共形不変であることを示す．

(2.107) 式の運動エネルギー項を，曲がった時空で正確に書くと，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{m}0} = -b\overline{\psi}\left(b^{\mu i}\gamma_i D_\mu\right)\psi \tag{F.1}$$

となる．ここで，$b = \det(b^i_\mu) = \sqrt{-g}$，また共変微分 D_μ は，ゲージ場との結合を省略して，

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{4}\omega^{ij}{}_{,\mu}\gamma_{ij} \tag{F.2}$$

ここで，ねじれがゼロの場合，スピン接続 $\omega^{ij}{}_{,\mu}$ は，

$$\omega_{ij,k} = -\omega_{ji,k} = \frac{1}{2}\left(\Delta_{k,ij} - \Delta_{i,jk} + \Delta_{j,ik}\right) \tag{F.3}$$

ただし，リッチ (Ricci) 回転係数 $\Delta_{k,ij}$ は，

$$\Delta_{k,ij} = -\Delta_{k,ji} = \left(b^\mu_i b^\nu_j - b^\mu_j b^\nu_i\right)\partial_\nu b_{k\mu} \tag{F.4}$$

で与えられる．さらに，

$$\gamma_{ij} = -\gamma_{ji} = \frac{1}{2}\left[\gamma_i, \gamma_j\right] \tag{F.5}$$

である．

また，部分積分によって (F.1) 式を「反対称化」された形

$$\mathcal{L}_{\mathrm{m}0} = -b\frac{1}{2}\overline{\psi}\left(\not{D} - \overleftarrow{\not{D}}\right)\psi \tag{F.6}$$

にしておくと，以下の議論に便利である．ここで，

$$\overleftarrow{\not{D}} = \left(\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{1}{4}\omega^{ij}_{,\mu}\gamma_{ij}\right)\gamma^\mu \tag{F.7}$$

と定義される．

さて，(3.60) 式に従って，

$$\Omega^{-3/2}\psi = \psi_*, \qquad \Omega^{-3/2}\overline{\psi} = \overline{\psi}_* \tag{F.8}$$

と変換した場合，D_μ，$\overleftarrow{D}_\mu$ の ∂_μ，$\overleftarrow{\partial}_\mu$ が $\Omega^{3/2}$ にかかることから生ずる項は，反対称化のために互いに打ち消すことがすぐにわかる．問題は，$\omega^{ij}_{,\mu}$ からの寄与である．

(3.57) 式から導かれる，

$$b^i_\mu = \Omega^{-1} b^i_{*\mu} \tag{F.9}$$

を (F.4)，(F.3) 式に代入すると，

$$\omega_{ij,k} = \Omega\left[\omega_{*ij,k} + (\eta_{ik}\partial_{*j} - \eta_{jk}\partial_{*i})\ln\Omega\right] \tag{F.10}$$

ここで，

$$\partial_{*i} = b^\mu_{*i}\partial_\mu \tag{F.11}$$

という記号を使った．

(F.10) 式で $\omega_{*ij,k}$ を含む項は，$\omega_{*ij,\mu}$ となるときに Ω がとれ，変換前と同じ形になり，したがって不変である．それ以外の項は，

$$\left\{\gamma^{ij}, \gamma^k\right\}(\eta_{ik}\partial_{*j} - \eta_{jk}\partial_{*i})\ln\Omega = 2\left\{\gamma^{ij}, \gamma_i\right\}\partial_{*j}\ln\Omega \tag{F.12}$$

となることがわかる．

一方，(F.5) 式から，

$$\{\gamma_{ij}, \gamma_k\} = 2\gamma_{ijk} \tag{F.13}$$

となるが，ここで γ_{ijk} は，γ_i の完全反対称化積であり，したがって，

$$\gamma^{ij}_i = 0 \tag{F.14}$$

したがって (F.12) 式は 0 となる．

こうして (F.6) 式は (F.8) 式と (F.9) 式に対して不変であることが結論される．

付　録　G　スケール変換の保存流

$$\mathcal{L}_{\rm BD} = \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\xi\phi^2 R - \epsilon\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right) \tag{G.1}$$

を考える．付録Aに従って，これは，

$$\mathcal{L}_{\rm BD} = -\sqrt{-g}\frac{1}{2}\xi\left(D^\lambda\partial_\lambda\phi^2 + \phi^2 R_2\right) - \sqrt{-g}\epsilon\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \tag{G.2}$$

と書き換えられる．ネーター流を求める処方に従い，

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}_{\rm BD}}{\partial\partial_\mu g_{\rho\sigma}}(-2g_{\rho\sigma}) + \frac{\partial\mathcal{L}_{\rm BD}}{\partial\partial_\mu\phi}\phi \tag{G.3}$$

を計算する．

まず $\mathcal{L}_{\rm BD}$ の中の第1項の D^λ を含む項から始める．(A.22) 式により，

$$\frac{\partial\left(\sqrt{-g}D^\lambda\right)}{\partial\partial_\mu g_{\rho\sigma}} = \sqrt{-g}\left(g^{\rho\lambda}g^{\sigma\mu} - g^{\rho\sigma}g^{\mu\lambda}\right) \tag{G.4}$$

これに $g^{\rho\sigma}$ を掛けると，

$$g^{\rho\sigma}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}D^\lambda\right)}{\partial\partial_\mu g_{\rho\sigma}} = -\sqrt{-g}\ 3g^{\lambda\mu} \tag{G.5}$$

したがって，

$$\frac{\partial\left(\sqrt{-g}D^\lambda\partial_\lambda\phi^2\right)}{\partial\partial_\mu g_{\rho\sigma}}g_{\rho\sigma} = -\sqrt{-g}\ 3g^{\mu\lambda}\partial_\lambda\phi^2 \tag{G.6}$$

を得る．

次に R_2 を含む部分だが，(A.4) 式を使って微分する際の式として，(A.5)，(A.6) 式より，

$$\frac{\partial \Gamma_\lambda}{\partial \partial_\mu g_{\rho\sigma}} = \frac{1}{2}\delta^\mu_\lambda g^{\rho\sigma} \tag{G.7}$$

$$\frac{\partial C^\lambda}{\partial \partial_\mu g_{\rho\sigma}} = g^{\lambda\rho} g^{\mu\sigma} - \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} g^{\rho\sigma} \tag{G.8}$$

を用意する．また，

$$\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}}{\partial \partial_\mu g_{\rho\sigma}} = \frac{1}{2}\left(g^{\lambda\rho}\delta^\mu_\alpha \delta^\sigma_\beta + g^{\lambda\rho}\delta^\mu_\beta \delta^\sigma_\alpha - g^{\lambda\mu}\delta^\rho_\alpha \delta^\sigma_\beta \right) \tag{G.9}$$

$$\frac{\partial \partial_\lambda g^{\alpha\beta}}{\partial \partial_\mu g_{\rho\sigma}} = -g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma}\delta^\mu_\lambda \tag{G.10}$$

も使う．こうして，

$$\frac{(\partial\sqrt{-g}R_2)}{\partial \partial_\mu g_{\rho\sigma}} g_{\rho\sigma} = \sqrt{-g} D^\mu \tag{G.11}$$

が得られる．

(G.6) 式と (G.11) 式を組み合わせて，

$$-2\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{BD}}}{\partial \partial_\mu g_{\rho\sigma}} g_{\rho\sigma} = \sqrt{-g}\xi\left(-3g^{\mu\nu}\partial_\nu \phi^2 + D^\mu \phi^2 \right) \tag{G.12}$$

となる．

ついで (G.3) 式の第 2 項は，

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{BD}}}{\partial \partial_\mu \phi}\phi = -\sqrt{-g}\xi D^\mu \phi^2 - \sqrt{-g}\epsilon g^{\mu\nu}\phi\partial_\nu \phi \tag{G.13}$$

となるので，(G.12) 式と合わせて，

$$J^\mu = -\sqrt{-g}\frac{1}{2}(\epsilon + 6\xi)\, g^{\mu\nu}\partial_\nu \phi^2 \tag{G.14}$$

を得る．D^μ を含む項が互いに消し合ってしまったことに注意．

最初のラグランジアンに Φ の部分

$$\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \right) \tag{G.15}$$

をつけ加えた場合，ϕ からの寄与として計算した際に現れた ϵ を含んだ項で，ϵ を取り除いたものと同じものとなり，けっきょく，(G.14) 式に，

$$-\sqrt{-g}\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\partial_\nu \Phi^2 \tag{G.16}$$

をつけ加えればよいことがわかる．

付　録　H　連続次元におけるループ積分

時空の次元数を N とするとき，1 ループのダイアグラムに現れる積分は，

$$I_{mn} = \int \mathrm{d}^N k \frac{\left(k^2\right)^{m-2}}{\left(k^2 + a^2\right)^n} \tag{H.1}$$

の形となる．power counting によると，これは $N + 2m - 4 - 2n$ 次の発散を示すはずである．そこで，

$$N < 2n - 2m + 4 \tag{H.2}$$

であれば積分は収束し，そこでの結果を大きな N の値に解析接続することを試みる．

ウィック (Wick) の回転を行って，

$$k^0 = ik^N$$

として，N 次元のユークリッド空間に移る (k^N は k の N 乗ではない)．角変数と大きさ k を用いると，(H.1) 式から，まず N 次元の単位球の体積

$$V_N = \frac{2\pi^\nu}{\Gamma(\nu)} \tag{H.3}$$

が分離される．ここで $\nu \equiv N/2$ とおいた．残るのは大きさ k の積分で，

$$I_{mn} = iV_N \int_0^\infty \mathrm{d}k \frac{k^{2m+2\nu-5}}{\left(k^2 + a^2\right)^n} \tag{H.4}$$

となる．

$$t = \frac{k^2}{a^2}$$

を導入すると，

$$\begin{aligned} I_{mn} &= iV_N \frac{1}{2}\left(a^2\right)^{m-n+\nu-2} \int_0^\infty \mathrm{d}t \frac{t^{m+\nu-3}}{(1+t)^n} \\ &= iV_N \frac{1}{2}\left(a^2\right)^{m-n+\nu-2} B\left(m+\nu-2, n-m-\nu+2\right) \end{aligned} \tag{H.5}$$

を得る．ここでベータ関数の積分表示

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^\infty t^{p-1}(1+t)^{-p-q} \tag{H.6}$$

を使った．

積分の発散は，(H.5) 式の中の $\Gamma(n-m-\nu+2)$ の極，すなわち，

$$\nu = n-m+2,\ n-m+3, \cdots \tag{H.7}$$

から生ずる．(H.2) 式を満たしていなくても，次元数が偶数でなければ収束することを意味し，単純な切断法とは違っていることがわかる．ガンマ関数の積分表示を用いて発散積分に意味を与えるというこの正則化法は，**佐藤の超関数**と同じ考えに立っている．

(4.55) 式の例では，$m=2$, $n=1$, $a=\mu_\Phi$ とおく．

また，この計算途中では，N を (H.7) 式からはずれた値においておくので，積分はすべて有限で，したがって「対称的積分」が使える．すなわち，

$$\int \mathrm{d}^N k\ k^\mu f\left(k^2\right) = 0, \qquad \int \mathrm{d}^N k k^\mu k^\nu f\left(k^2\right) = \eta^{\mu\nu}\frac{1}{N}\int \mathrm{d}^N k k^2 f\left(k^2\right) \tag{H.8}$$

などとする．これはユークリッド化した空間の等方性を表しているにすぎないが，正則化していない場合，素朴には適用できなかった性質である．

付　録 I　多次元時空における内部空間の半径から生ずる場

$4+n$ 次元時空の一部が，n 次元にコンパクト化される場合を考える．$(4+n)\times(4+n)$ の**多脚場**が，次のようにブロック化されると仮定する．

$$b_M^A = \begin{pmatrix} b_\mu^i & 0 \\ 0 & b_\alpha^a \end{pmatrix} \tag{I.1}$$

ここで，$\mu, i = 0,1,2,3; \alpha, a = 1,2,\cdots n$ とする．非対角成分は，4 次元でベクトル場を表すことになるが，今はスカラー場の方に焦点を合わせるので，省略する．また，

$$b_\alpha^a = a(x)\tilde{b}_\alpha^a \tag{I.2}$$

と書く．$\tilde{b}_\alpha^a$ は n 次元の「内部空間」を表す純粋に幾何学的な多脚場で，a はその「半径」を表すが，これが 4 次元座標 x の関数であると考える．

標準的な処方に従って，次の量を順次計算する．($M, A = 0,1,\cdots n+3$ で，それぞれ一般座標変換，局所ローレンツ変換の添え字)

$$\Delta_{A,BC} = \left(b_B^M b_C^N - b_C^M b_B^N\right)\partial_N b_{AM}, \tag{I.3}$$

$$\omega_{AB,C} = \frac{1}{2}\left(\Delta_{C,AB} - \Delta_{A,BC} + \Delta_{B,AC}\right), \tag{I.4}$$

$$R^{AB}_{,MN} = 2\left(\partial_{[M}\omega^{AB}{}_{,N]} + \omega^A_{C,[M}\omega^{CB}{}_{,N]}\right), \tag{I.5}$$

$$R = -\omega_{AB,C}\omega^{AC,B} + \omega_A\omega^A \quad (\text{ただし}\quad \omega_A = \omega_{AB,}{}^B) \tag{I.6}$$

ここで [　] は反対称化を表す．また (I.6) 式は (I.5) 式から得られた結果に $\sqrt{-R}$ を掛け，さらに部分積分によって 2 階微分をとり除いたものであり，(A.2)，(D.2) 式に対応する．

Ansatz (I.1) 式の場合，ゼロでなく残るのは，

$$\left.\begin{aligned}\Delta_{i,jk} &= \Delta^{(4)}_{i,jk} \\ \Delta_{a,ib} &= -b_i^{\mu}\delta_{ab}\partial_{\mu}a \\ \Delta_{a,bc} &= a^{-1}\tilde{\Delta}^{(n)}_{a,bc}\end{aligned}\right\} \tag{I.7}$$

および,

$$\left.\begin{aligned}\omega_{ij,k} &= \omega^{(4)}_{ij,k} \\ \omega_{ia,b} &= -\delta_{ab}b_i^{\mu}\partial_{\mu}a \\ \omega_{ab,c} &= a^{-1}\tilde{\omega}_{ab,c}\end{aligned}\right\} \tag{I.8}$$

となる. ここで $^{(4)}$ とつけたのは, 純粋に4次元の量であることを示す. また, $\tilde{}$ をつけたものは当然 n 次元の量である.

これらから,

$$\begin{aligned}-\omega_{AB,C}\omega^{AC,B} &= -\omega_{ij,k}\omega^{ik,j} - \omega_{ab,c}\omega^{ac,b} - \omega_{ia,b}\omega^{ib,a} - \omega_{ai,b}\omega^{ab,i} \\ &= -\omega^{(4)}_{ij,k}\omega^{ik,j(4)} - a^{-2}\tilde{\omega}_{ab,c}\tilde{\omega}^{ac,b} - ng^{\mu\nu}\partial_{\mu}a\partial_{\nu}a\end{aligned} \tag{I.9}$$

ここで n は $\delta_{ab}\delta^{ab} = \delta^a_a = n$ から出た.

また,

$$\left.\begin{aligned}\omega_i &= \omega_{ij,}{}^{j} + \omega_{ia,}{}^{a} \\ &= \omega_i^{(4)} - nb_i^{\mu}\partial_{\mu}a \\ \omega_a &= \omega_{ai,}{}^{i} + \omega_{ab,}{}^{b} = a^{-1}\tilde{\omega}_a\end{aligned}\right\} \tag{I.10}$$

より,

$$\omega_A\omega^A = \omega_i^{(4)}\omega^{i(4)} - 2n\omega_i^{(4)}b^{i\mu}\partial_{\mu}a + n^2g^{\mu\nu}\partial_{\mu}a\partial_{\nu}a + a^{-2}\tilde{\omega}_a\tilde{\omega}^a \tag{I.11}$$

これらを (I.6) 式に代入すると,

$$R = R_4 + a^{-2}\tilde{R}_n + \left(n^2 - n\right)g^{\mu\nu}\partial_{\mu}a\partial_{\nu}a - 2n\omega_i^{(4)}b^{i\mu}\partial_{\mu}a \tag{I.12}$$

を得る. また,

$$\sqrt{-g_N} = \sqrt{-g_4}\,a^n \tag{I.13}$$

である.

(I.12) 式にはすでに $a(x)$ の運動エネルギー項の形の項が見えている．しかし，(I.13) 式の $a^n(x)$ がかかるので，正準形にするために，

$$\phi(x) = 2\frac{\sqrt{n(n-1)}}{n+2}a^{(n+2)/2} \tag{I.14}$$

によって，スカラー場 $\phi(x)$ を導入する．

こうして，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{-g_N}R = \sqrt{-g_4}\Big(&\frac{1}{2}K_n\phi^{2n/(n+2)}R_4 + \frac{1}{2}K_n^{2(n-2)/(n+2)}\tilde{R}_n \\ &+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi - K_{1n}\omega^{(4)\mu}\phi^{n/(n+2)}\partial_\mu\phi\Big)\end{aligned} \tag{I.15}$$

を得る．ここで，

$$K_n = \left(\frac{n+2}{2\sqrt{n(n-1)}}\right)^{2n/(n+2)}, \quad K_{1n} = n\left[\frac{1}{2}n(n-1)(n+2)\right]^{-n/(n+2)}K_n \tag{I.16}$$

(I.15) 式の第 3 項の符号は $n \geqq 2$ の場合，ϕ がゴーストであることを示している．もちろん，$n=1$ ならばこの項は存在しない．また，同じく第 4 項は新たな非最小結合であることを示す．

そのためには，まず部分積分によって，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4 &= -\sqrt{-g_4}K_{1n}\omega^{(4)\mu}\phi^{n/(n+2)}\partial_\mu\phi \\ &= \frac{n+2}{2(n+1)}K_{1n}\phi^{2(n+1)/(n+2)}\partial_\mu\left(\sqrt{-g_4}\omega^{(4)\mu}\right)\end{aligned} \tag{I.17}$$

と変形しておく．ついで，

$$\partial_\mu\left(\sqrt{-g_4}\omega^{(4)\mu}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{-g_4}R_4 \tag{I.18}$$

を示す．それができたら，$\mathcal{L}_4$ は確かに非最小結合であり，(I.15) 式 と合わせて，非最小結合は全体として，

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g_4}\left(K_n\phi^{2n/(n+2)} + \frac{n+2}{2(n+1)}K_{1n}\phi^{2(n+1)/(n+2)}\right)R_4 \tag{I.19}$$

となる．

そこで (I.18) 式の証明方法を説明する．左辺はスカラー密度で，また四脚

場の2階の微分までを含むことから，右辺の形は当然，予想される．したがって比例係数さえ決定すればよい．そのためには，局所ローレンツ系で計算すればよい．すなわち，四脚場の2階微分は残すが，1階微分はゼロとおいて計算を簡単にする．この方法でまず，

$$\partial_\lambda \omega^\lambda = b^{i\lambda}\left(b_i^\mu b^{k\nu} - b^{k\mu} b_i^\nu\right)\partial_\lambda \partial_\nu b_{k\mu} = b_\nu^k\left(\partial^\nu \partial^\mu - \eta^{\nu\mu}\Box\right) b_{k\mu} \qquad \text{(I.20)}$$

を得る．

R_4 については，(I.6) 式ではなく，2階微分を含む (I.5) 式から直接計算する．それを (I.20) 式と比較することによって，係数 1/2 が得られる．

付録 J アインシュタインの静的宇宙のふるまい

スカラー場がなく，マイナスの宇宙定数がある場合の方程式は，

$$3H^2 = \Lambda + \rho \tag{J.1}$$

$$\dot{\rho} + 4H\rho = 0 \tag{J.2}$$

で与えられる．簡単のため，空間的には平坦で，放射優勢の宇宙を考える．

(J.1) 式より，

$$H = \left(\frac{\Lambda + \rho}{3}\right)^{1/2} \tag{J.3}$$

これを (J.2) 式に代入すると，

$$\dot{\rho} + \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\Lambda + \rho\right)^{1/2}\rho = 0 \tag{J.4}$$

を得る．$H = 0$ は $\rho = -\Lambda > 0$ で実現する．

この点のまわりで ρ を展開する．

$$\rho = -\Lambda + f(t) \tag{J.5}$$

とおいて，(J.4) 式で f について最低次の項のみ残すと，

$$\dot{f} - \frac{4\Lambda}{\sqrt{3}} f^{1/2} = 0 \tag{J.6}$$

を得る．この解は，

$$f(t) = \frac{4\Lambda^2}{3}\left(t - t_0\right)^2 \tag{J.7}$$

となる．

これを (J.3) 式に代入すると，

$$H = \frac{2\Lambda}{3}(t - t_0) \tag{J.8}$$

を得る．$t - t_0$ の絶対値をとってもよさそうに思えるが，そうすると $H(t)$ が $t = t_0$ で不連続になり，00 成分以外のアインシュタイン方程式に矛盾を生ずる．

$H = \dot{a}/a$ を (J.8) 式に代入すると，$a(t)$ の微分方程式になるが，その解は，

$$a(t) = a(t_0)\exp\left[\frac{\Lambda}{3}(t - t_0)^2\right] \tag{J.9}$$

となる．図に示すと，本文の図 5.3 となる．

もし，ρ の初期値をちょうど $-\Lambda$ に等しく選んでおくと，たしかに $H = 0$，したがって a = const. が以後の時間にも保たれる．しかし初期値が少しでもずれると，$a(t)$ は変化する．ちょうど鉛筆を逆さにして立てようとするのに似ていて，初期値の「微調整」によって静的な宇宙を実現するのは，少々無理な考えというべきだろう．

あとがき

高橋先生と初めてお会いしたのは 1969 年の夏であった．アメリカの Purdue 大学に滞在中であったが，Colorado 大学の Summer School に出席し，その後家族とともに北上し，夕方になると motel を探して泊まりながら，Edmonton に着いた．1 週間か 2 週間の滞在だったと思うが，場の理論について，流行にとらわれない根元的な問題を常に問い続ける先生の姿勢に，強い感銘を受けた．帰途は Jasper,Banff を通り，その後は Indiana まで，大平原地帯を対角線状にひたすら走った．

それを機会に，その後何度か Edmonton でお世話になった．夏もあったが厳冬期もあり，休日に一人で訪れた Lesser Slave Lake の往復路は忘れられない．そのころ先生といっしょに書いた論文を，再び思い出す機会があった．発散の正則化に関するもので，本書の 4 章に新しい応用としてとりいれてある．実は少し前に，「積分がたとえ有限になっても，そのまま信用はできない．正則化をしてみなければならない」というこの論文の主旨を，みずから忘れて誤りの論文を出しており，改訂版をやっと書いたところである．

また高橋先生については，何と言っても著書の独特の語り口から受けた印象の強さが格別である．私も一般向けを含めて多少の本を書くことになったが，先生のスタイルは常に意識の中心にあった．先生と同じになるわ

けはないが（特に駄洒落の才の欠如），簡潔さと「くどさ」のバランスをどう保つか，この本でも苦心した．これも先生の影響を自分流に受け止めた結果だと思っている．

今はどうか確かめてはいないが，高橋先生は音楽を聴きながらお書きになるのが常であったようである．わたしもある程度それを模倣しているが，今よく聞いているもので，ひとと少し違っているものをあげると，Dmitri Schostakovich の弦楽四重奏ということになろう．以前 Borodin Quartet が来日して 3 曲ほどを放送し，さらにイギリスで録音したものが NHK FM で放送され，かつての同僚の加藤正昭氏が，何曲かをテープにして聞かせてくれたのが病みつきの始まりであった．その後，Schostakovich Quartet が来日した折に，一晩王子ホールで聞いて感激したが，最近秋葉原で彼らの全曲 CD を手に入れ，しばしば聞いている．

Schostakovich は，想像を絶する困難な時代を，おそらく何重人格かを使い分けて生きなければならなかったのだろうが，その一面が最もよくわかるのが 15 曲の弦楽四重奏であり，現代の奇跡といっては言い過ぎだろうか．私にとって今や最も心地よい BGM となってしまった Beethoven の弦楽四重奏よりは“とげ”も多いが，これほど心の内側を聞くことのできる音楽はあまりないように思う．

こんなことを物理の本の一端に書かせていただけるのも，高橋先生のシリーズならではと考えながら，筆ならぬキーボードを休めたい，と思っていた．

ところが，この原稿が校正にかかる直前，物語の主人公ともいうべき Robert Dicke 教授の訃報に接した．1997 年 3 月 4 日，80 才で亡くなった旨の，Carl Brans 教授発信の電子メールが研究者の間に流された．彼はスカラー・テンソル理論の提出者としてだけでなく，実験相対論（experimental relativity）という新分野の開拓者としても知られる．一般相対論に基づく重力理論を，実験とともに進む重力“物理学”として発展させるために尽力し，その影響力は大きかった．20 数年前 Princeton に彼を

訪ね，有限到達距離重力について議論をしてもらった時のことが，今でも思い出される．衷心から哀悼の意を表したい．

この本の内容となったことがらは私のこれまでの研究と深く結びついており，それについては長年にわたって励ましを受け，刺激を与えて下さった多くの方々に感謝しなければならない．その中で，もちろん高橋先生にもあらためて御礼を申し上げなければならないし，また Dicke 先生に対しては，感謝というより尊敬の念を感じてきた．しかし以下では，この本の執筆過程で直接関与の労をとってくださった方々に限って，名前をあげさせていただきたい．

時期としては多少以前になるが，Yong Min Cho 教授と議論を重ねたことが，特に等価原理や混合結合に関する記述の動機となっている．4 章の異常項に関する議論については，Ephraim Fischbach 教授のコメントに感謝したい．また 5 章の宇宙論の方程式の解については，富松　彰教授，前田恵一教授との議論に負うところが多い．さらに全体的に目を通していただき，いくつものご意見を伺った斉藤　武教授にも謝辞を述べたい．最後になったが，講談社サイエンティフィクの太田一平氏にはいろいろな面でたいへんお世話になった．深く感謝申しあげる次第である．さらに，太田氏に約束した原稿提出時期を気にすることによって，執筆に“関与”することとなった妻 薫にも，感謝の意を表しておきたい．

参考文献

さらに詳しく調べたい方のために文献をあげておこう．

B-D 理論そのものについては，まずオリジナルの論文

1. C. Brans and R. H. Dicke, *Phys. Rev.*, **124**, 925 (1961).

および，それに続いて書かれた共形変換に関する論文

2. R. H. Dicke, *Phys. Rev.*, **125**, 2163 (1962).

をあげる必要がある．この理論については，いくつかの教科書でもとりあげられている．たとえば，

3. S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley (1972).

本書を読むために一般相対論の知識が必要だが，文献 3 あるいはその他の教科書が利用できるだろう．ここでは，あえて拙著をあげておく．

4. 藤井保憲，時空と重力，産業図書(1976).

5. 藤井保憲，超重力理論入門，マグロウヒル(1987).

文献 5 は，四（多）脚場，フェルミオン，カルーザ・クライン理論などの理解に役だつだろう．

4 章の連続次元正則化法については，付録 H で十分と思うが，その基礎となる 4 次元での発散積分の取り扱いについては，標準的な場の理論の教科書をみていただきたい．“あとがき”で触れた失敗の論文，およびその訂正論文は，それぞれ，

6. Y. Fujii, *Mod. Phys. Lett.*, **A9**, 3685 (1994).

7. Y. Fujii, *Mod. Phys. Lett.*, **A12**, 371 (1992) ; gr-qc/9610006 (1996).

である．文献 7 は単なる訂正ではなく，重力が関与する微視的過程の計算に有用なものと考えている．

有限到達距離重力（第 5 の力）については，オリジナルな論文として，

8. Y. Fujii, *Nature Phys. Sci.*, **234**, 5 (1971); *Phys.Rev.*, **D9**, 874 (1974).

9. E. Fischbach, D. Sudarsky, A. Szafer, C. Talmadge and S. Aronson, *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 3 (1986).
また，総合報告として，
10. Y. Fujii, *Int. J. Mod. Phys.*, **A6**, 3505 (1991).
11. E. Fischbach and C. Talmadge, *Nature*, **356**, 207 (1992).
を見ていただきたい．これらに多くの論文が引用されている．また，
12. Allan Franklin, *The Rise and Fall of the Fifth Force*, American Institute of Physics (1993).
は，この分野の研究の歴史を，生き生きとした筆致で描いている．

宇宙定数問題については，すこし古いが全体的な問題提起として，
13. S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.*, **61**, 1 (1989).

比較的新しい論文として，たとえば，
14. J. P. Ostriker and P. J. Steinhardt, *Nature*, **377**, 600 (1995).
がある．

宇宙時とともに減衰する宇宙定数については，
15. Y. Fujii and T. Nishioka, *Phys. Rev.*, **D42**, 361 (1990).
および，その中に引用された論文が参考になるだろう．特に宇宙定数に本当に下限があるとしたらどう考えるかについては，やはり筆者の論文
16. Y. Fujii, *Astroparticle Phys.*, **5**, 133 (1996).
を参照していただきたい．

本文の最後に触れた非最小結合のもっと一般的な形を議論した論文としては，たとえば，
17. T. Damour and A. M. Polyakov, *Nucl. Phys.*, **B423**, 532 (1994).
をあげておく．結合定数が時間とともに変わるか，という問題については，図5.5 の説明文にあげられている論文を参照してほしい．同じく「2 枚の時空」の話は，
18. A. Kokado, G. Konisi, T. Saito and K. Uehara, *Prog.Theor. Phys.*, **96**, 1291 (1996).
によるものである．

索　　引

著者紹介

藤井（ふじい）　保憲（やすのり）　理学博士

1954年　名古屋大学理学部物理学科卒業

現　在　東京大学名誉教授

日本福祉大学情報社会科学部教授

主要著書　「相対論の再発見」（講談社）「時間とは何だろうか」（岩波書店）「時空と重力」（産業図書）ほか多数

NDC 421　156 p　21 cm

物理（ぶつり）のたねあかし 4　重力（じゅうりょく）とスカラー場（ば）

1997年 5 月10日　第 1 刷発行
1997年 9 月10日　第 2 刷発行

著　者　藤井保憲（ふじいやすのり）

発行者　野間佐和子

発行所　株式会社　講談社
〒112-01 東京都文京区音羽2-12-21
販売部　(03)5395-3624
製作部　(03)5395-3615

編　集　株式会社　講談社サイエンティフィク
代表　中島信也
〒162 東京都新宿区新小川町9-25 日商ビル
編集部　(03)3235-3701

印刷所　株式会社平河工業社・半七写真印刷工業株式会社

製本所　株式会社国宝社

落丁本・乱丁本は，講談社書籍製作部宛にお送り下さい．送料小社負担にてお取替えします．なお，この本の内容についてのお問い合わせは講談社サイエンティフィク編集部宛にお願いいたします．定価はカバーに表示してあります．

© Yasunori Fujii, 1997

R〈日本複写権センター委託出版物・特別扱い〉 本書の複写(コピー)には，日本複写権センターの「出版物の複写利用規程」で定める特別許諾が必要です．複写を希望される場合は，日本複写権センター(03-3401-2382)にご連絡下さい．

Printed in Japan

ISBN4-06-155103-5　(KS)

講談社の自然科学書

物理数学ノートⅠ	高橋康／著	本体 2,700円
物理数学ノートⅡ	高橋康／著	本体 2,816円
古典場から量子場への道	高橋康／著	本体 2,427円
初等相対性理論	高橋康／著	本体 2,816円
統計力学入門	高橋康／著	本体 2,720円
量子場を学ぶための場の解析力学入門	高橋康／著	本体 2,700円
量子力学を学ぶための解析力学入門	高橋康／著	本体 1,650円
図でわかる電磁気学	伊藤彰義／著	本体 3,592円
量子力学Ⅰ	猪木慶治・川合光／著	本体 4,660円
量子力学Ⅱ	猪木慶治・川合光／著	本体 4,660円
非平衡系の科学Ⅰ	北原和夫・吉川研一／著	本体 3,210円
非平衡系の科学Ⅱ	北原和夫／著	本体 3,010円
非平衡系の科学Ⅲ	三池秀敏・森義仁・山口智彦／著	本体 3,800円
ファインマン経路積分	L. S. シュルマン／著　高塚和夫／訳	本体 5,730円
密度汎関数法とその応用	菅野暁／監修　里子允敏・大西楢平／著	本体 9,520円
Mathematica でみる数理物理入門Ⅰ	阿部寛／著	本体 3,786円
Mathematica でみる数理物理入門Ⅱ	阿部寛／著	本体 3,786円
機能材料のための量子工学	山田興治ほか／著	本体 3,786円
不可逆過程の熱力学入門	一柳正和／著	本体 2,427円
デンディ プラズマダイナミクス	R. デンディ／著　粥川尚之 ほか／訳	本体 3,204円
大学院物性物理　1	伊達宗行／監修　福山秀敏ほか／編	本体 5,340円
大学院物性物理　2	伊達宗行／監修　福山秀敏ほか／編	本体 5,340円
大学院物性物理　3	伊達宗行／監修　福山秀敏ほか／編	本体 5,340円
大学院原子核物理	中村誠太郎／監修　吉川庄一ほか／著	本体 5,340円
大学院素粒子物理　1	中村誠太郎／監修　南部陽一郎ほか／著	本体 5,500円
物理のたねあかしシリーズ	シリーズ編者／高橋康	
物理のたねあかし 1　多量子問題から場の量子論へ	高橋康／著	本体 2,700円
物理のたねあかし 2　脳と力学系	武田暁／著	本体 2,700円
物理のたねあかし 3　情報の物理学	豊田正／著	本体 2,700円
物理のたねあかし 4　重力とスカラー場	藤井保憲／著	本体 2,700円

この本体価格に消費税が加算されます。定価は変わることがあります。